Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2019, nº 103, 71-87**

Resolución de problemas con la calculadora gráfica CG50

Lluís Bonet Juan
IES Mare Nostrum, Alacant
Ricard Peiró i Estruch
IES Abastos, València
Mª Teresa Navarro Moncho
Cefire Científic, Tecnològic i Matemàtic, València

Resumen: *En el currículo de Educación Secundaria y Bachillerato se cita expresamente el uso de la calculadora gráfica en el área de matemáticas. Sin embargo, gran parte del profesorado no solo no la utiliza como recurso, sino que además la prohíbe. Pero su uso como recurso didáctico posibilita un cambio en la metodología del aula favoreciendo en el alumnado la actividad investigadora y creadora a través de trabajos dirigidos y enunciados detallados. Además, facilita la observación y la toma de decisiones manejando estrategias diversas para obtener los resultados, analizarlos y ser críticos con ellos.*
Palabras clave: *competencia matemática, calculadora gráfica CG50, resolución de problemas.*

Troubleshooting with the CG50 graphing calculator

Abstract: *The curriculum of Secondary Education and Bachillerato mentions expressly the use of the graphic calculator in the area of mathematics. However, a great part of the faculty does not only ignore them as a resource, but they prohibit their use in the classroom; not taking into account that their use as a didactic resource makes it possible to change the methodology of the classroom; favouring the research and creative activity through directed and detailed formulations. Besides, it facilitates the observation and decision making by handling a variety of strategies to obtain the results, and eventually analyse and be critical to them.*
Keywords: *mathematic competence, graphic calculator CG50, problem solving*

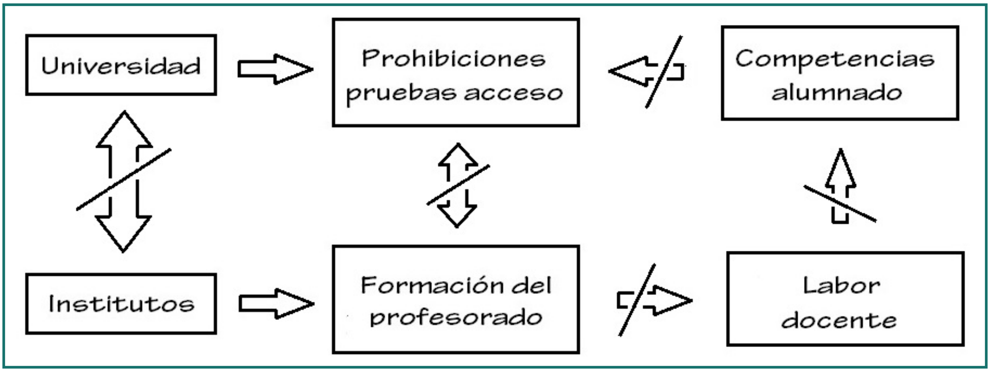

Figura 1.

INTRODUCCIÓN

Actualmente son los países que incorporan y potencian las metodologías activas y el uso de las nuevas tecnologías en sus aulas, los que están consiguiendo unas mejores valoraciones de sus sistemas educativos.

Nada nuevo si se tiene en cuenta que han pasado ya casi diez años desde aquella Epsilon 76 del año 2010 donde nuestro compañero Maurici Contreras daba cuenta de la mejora de la competencia matemática a través de la resolución de problemas haciendo uso de herramientas como la calculadora gráfica, además de otras experiencias de aula en este mismo número.

El Currículum de Bachillerato, en vigor desde hace algún año más, pone de manifiesto que "La resolución de problemas como contenido y método es un objetivo prioritario [...] El alumnado ha de aprender matemáticas utilizándolas en una gran variedad de contextos [...] que ayuden a entender el mundo cambiante que nos rodea y a tomar decisiones tanto en la vida diaria como en la futura vida profesional […] El uso de recursos didácticos y materiales variados como calculadoras científicas y gráficas, programas de geometría dinámica y otros, materiales digitales didácticos y recursos en la red, ofrecen la oportunidad de diseñar escenarios de aprendizaje enriquecidos para que los estudiantes perciban las matemáticas como una ciencia experimental y un proceso exploratorio significativo dentro de su formación"

Las preguntas que nos planteamos son ¿en qué situación nos encontramos actualmente en España?, y sobre todo ¿hacia dónde nos dirigimos?

La casi total desconexión que existe entre Universidad e institutos y la prohibición del uso de calculadoras gráficas en la mayoría de las comunidades autónomas en las pruebas de acceso a la universidad no contribuye a la formación del profesorado en la utilización de este ni de otros recursos tecnológicos que pueden contribuir en la ansiada mejora de nuestra labor docente y de la competencia matemática de nuestro alumnado (figura 1).

Pero existen otros factores como el número de horas de docencia directa de Matemáticas y nuestro propio modelo de enseñanza que nos hacen pensar y reflexionar sobre qué es lo que está ocurriendo y cómo se están haciendo las cosas en los países vecinos como Francia, Alemania, Portugal…, o aquí mismo en España en el Bachillerato Internacional.

A finales del año 2018 la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas hizo público un informe sobre el uso de calculadoras en las pruebas de acceso a la Universidad[1]. El informe recoge las desigualdades de las calculadoras permitidas entre las diferentes comunidades autónomas y entre los diferentes tipos de bachillerato, a pesar de que el distrito es único. Pone de manifiesto que los países con mejor nota en el informe PISA permiten usar calculadoras en el aula y en los exámenes, tal como defienden instituciones como el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) o la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) que aunque no se posiciona sobre el uso de las calculadoras desde su web son numerosas las publicaciones y contribuciones presentadas en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), avalado y organizado por esta comisión, que defienden el uso de este recurso en cualquier etapa educativa de forma similar a como lo hace el NCTM.

También nos recuerda que "Las matemáticas no consisten en hacer muchas operaciones, sino en saber qué operaciones hay que hacer, en qué orden, con qué objetivo y la calculadora contribuye a crear este pensamiento matemático. La calculadora, de hecho, es una herramienta didáctica que sirve para simplificar los cálculos, pero **no tiene la capacidad de pensar**. Actualmente en los problemas planteados en las pruebas de acceso a la universidad la calculadora es un recurso indispensable que descarga al alumno de operaciones rutinarias, con el fin de que dedique más tiempo a analizar, interpretar y razonar sus respuestas."

Ante este marco tan desolador, solamente nos queda luchar por una educación de calidad, sin agravios, ni dentro ni fuera de nuestro país, para todo nuestro alumnado. Con el objetivo de contribuir en la mejora de la enseñanza de las matemáticas presentamos algunos ejemplos de problemas resueltos con la ayuda de una calculadora gráfica, pues sabemos y así lo avalan muchas investigaciones, que la utilización de la calculadora gráfica como recurso didáctico posibilita un cambio en la metodología de aula favoreciendo en el alumnado la actividad investigadora y creadora a través de trabajos dirigidos y enunciados detallados. Además su uso facilita la observación y la toma de decisiones manejando estrategias diversas con las cuales alcanzar los resultados para finalmente analizarlos y ser críticos con ellos.

Las diferencias con Francia en cuanto al número de horas dedicadas a la enseñanza de las matemáticas desde 4º de ESO hasta 2º de Bachillerato y el tipo de calculadora que se permite el las pruebas de acceso a la Universidad se recogen en la tabla 1.

El siguiente problema es una adaptación de un problema extraído del Mathématiques Terminale de Dudarte y Verlant (2010, p.308). En la resolución que publicamos se muestra cómo el uso de la calculadora pone el énfasis en el razonamiento y el pensamiento crítico y no en los cálculos.

1. Descargable en <https://fespm.es/index.php/2018/12/06/el-uso-de-calculadoras-en-las-pruebas-de-acceso>.

Tabla 1. Tabla comparativa del número de horas de matemáticas en los cursos superiores de la ESO y bachillerato.

España	**4º ESO** 4 horas/semana	**1º BACH CIENCIAS** 4 horas/semana	**2º BACH CIENCIAS** 4 horas/semana
Francia	**SECONDE** 4 heures/semaine	**PREMIÈRE SCIENTIFIQUE** 4 heures/semaine Calculatrice graphique obligatoire avec mode examen	**TERMINALE SCIENTIFIQUE** 6 heures/semaine (+ 2 h/sem si spécialité) Calculatrice graphique obligatoire avec mode examen

La tabla siguiente presenta el número de muertos en accidente de tráfico en las carreteras de Francia entre los años 2011 y 2017 y se observa cómo el número de muertos ha ido disminuyendo considerablemente.

Año	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**
Xi **Rango año**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Yi **Nº muertos**	**8160**	**7655**	**6058**	**5530**	**5318**	**4942**	**4838**

a) Representa gráficamente la nube de puntos y realiza un ajuste lineal. A partir de este modelo ¿cuál es el número de muertos en accidentes de carretera que se prevén para 2020?

b) Considera el modelo logarítmico $f(x)=a+b \cdot \ln x$ en el intervalo [1, 15]. Justifica que la función es decreciente en este intervalo e indica cuál es el número de muertos que este nuevo modelo prevé para 2020.

c) A la vista de los dos modelos, ¿cuál no permite obtener una previsión realista para 2025?

a) El Menú 2: Estadística permite introducir las dos variables y representar gráficamente la nube de puntos con la que realizar el ajuste:

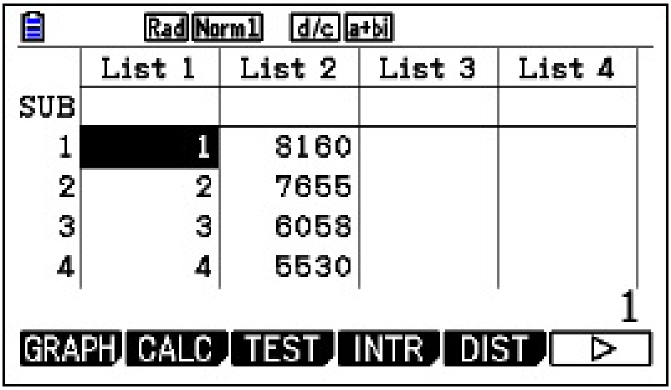

Figura 2

Desde GRAPH se selecciona GRAPH1:

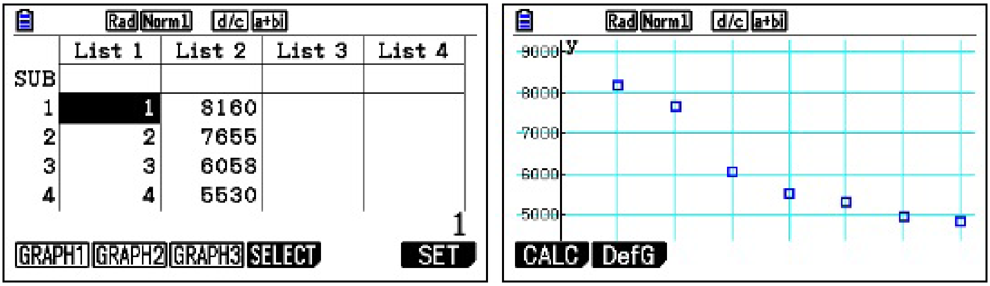

Figura 3

Se selecciona CALC para escoger la regresión lineal pulsando en *X* y el modelo $y = a \cdot x + b$:

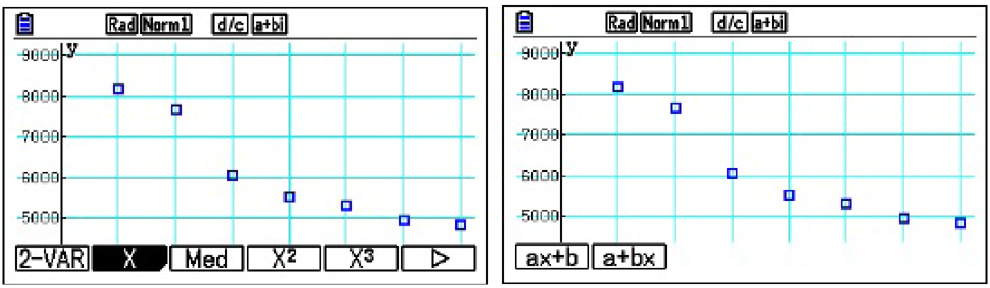

Figura 4

En los resultados de la regresión lineal se obtiene un modelo de recta decreciente que ajusta los datos con un coeficiente de correlación cercano a −1: $r = -0{,}9396$ y cuyo coeficiente de determinación es: $r^2 = 0{,}8828$.

Se selecciona COPY que permite guardar la recta en Y1 pulsando ENTER y posteriormente DRAW:

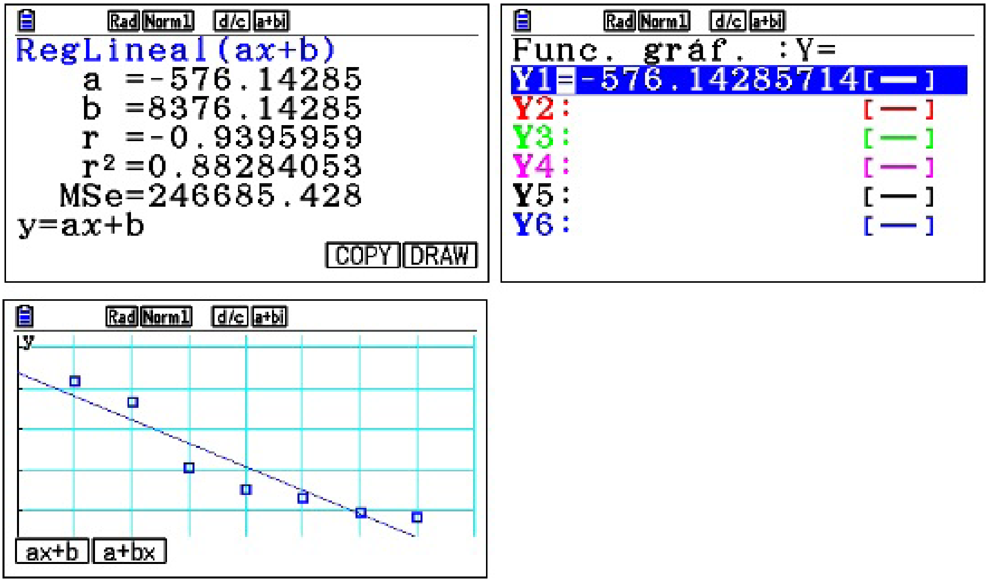

Figura 5

Para calcular la estimación de muertos en accidente de tráfico con este modelo se selecciona el Menú 1 y al sustituir en la función se obtiene una estimación de 2614 muertos para el año 2020:

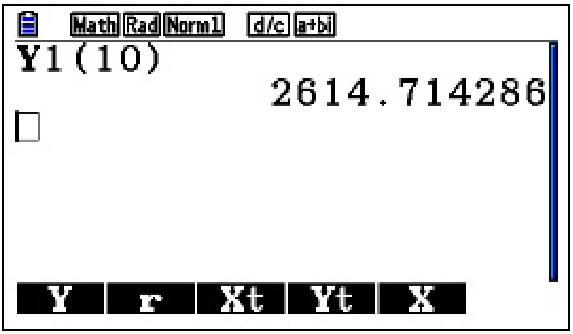

Figura 6

b) Se realiza ahora el ajuste con el modelo logarítmico propuesto:

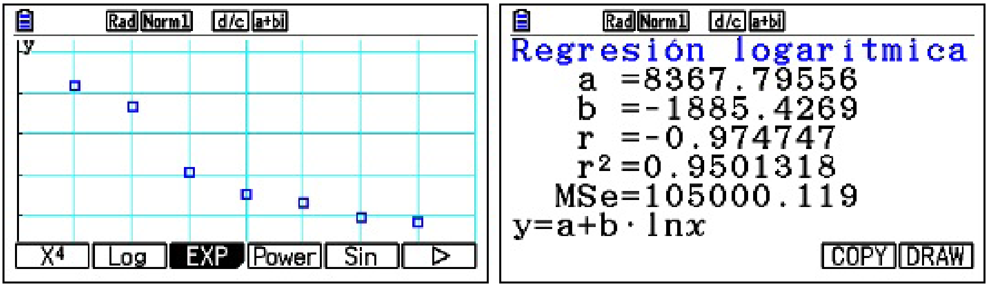

Figura 7

Este nuevo modelo presenta unos coeficientes de correlación y de determinación mejores que el modelo lineal. Se guarda esta nueva función en Y2 y se representa gráficamente para observar el ajuste:

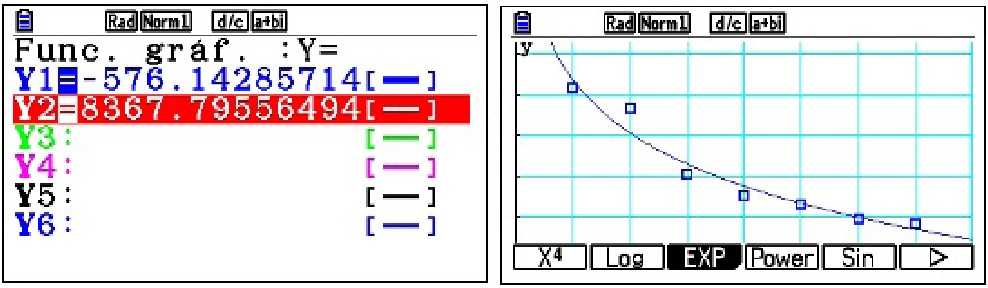

Figura 8

Se calcula ahora el número de muertos previsto para 2020 con este nuevo modelo que resulta ser de 4026, bastante diferente al dato obtenido con el modelo lineal:

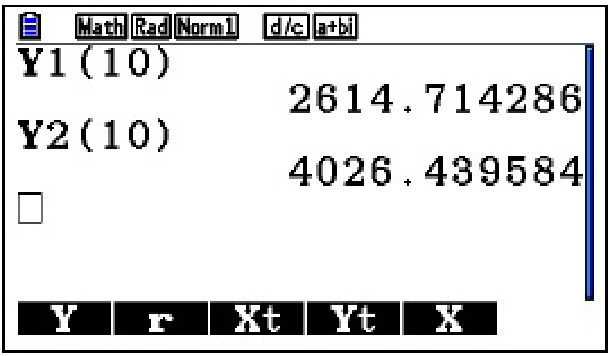

Figura 9

Desde el **Menú 7: Tabla** se pueden analizar los valores de la primera derivada de Y2 en el intervalo [1,15] y constatar que siempre son negativos (función decreciente):

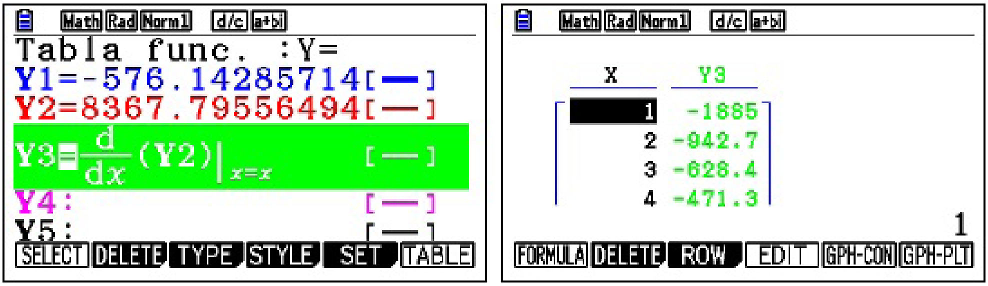

Figura 10

A la vista de los dos modelos se pregunta por una previsión realista para el año 2025. Para ello, de nuevo en el Menú 1 se hacen las estimaciones con cada modelo:

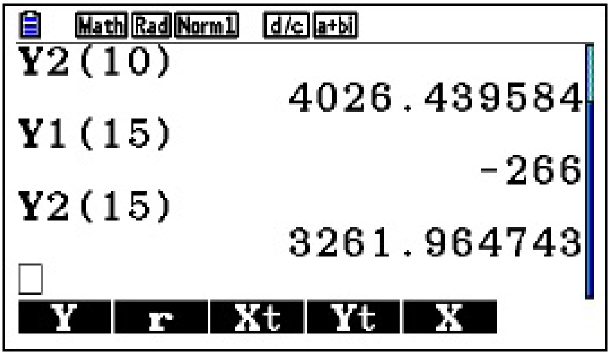

Figura 11

Se observa que las limitaciones del modelo, en el caso de la regresión lineal, proporcionan un resultado sin sentido en el contexto.

El sistema educativo portugués ha experimentado una considerable mejora con una apuesta por la innovación, la reorganización de los currículos y el reconocimiento social del trabajo docente. Si los países que están haciendo una mayor apuesta por la educación, en general incorporan las TIC como recursos para la mejora del aprendizaje de las matemáticas, fomentan la creatividad de sus estudiantes que forman parte activa en los procesos de su aprendizaje, potencian el trabajo colaborativo y el sentido crítico, entonces la calculadora gráfica es un elemento que encaja a la perfección dentro de este esquema en lo que a nuestra materia se refiere, apostando a la vez, claro está, en la formación del profesorado para que pueda dar cumplida respuesta a las necesidades en el aprendizaje del alumnado.

El siguiente problema es una adaptación de un problema extraído de Mathematics for the international student 10E (MYP5 Extended) (2014, p.480). La resolución con la calculadora evita tener que realizar los cálculos manualmente y disponer de este tiempo para razonar, tomar decisiones e interpretar los resultados.

La fracción de la Luna que está iluminada por la noche viene dada por la función:

$$M(t)=\frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi t}{15}\right)+\frac{1}{2}$$

Figura 12

donde t es el tiempo en días desde el 1 de enero.

a) Dibuja la gráfica de la función cuando .

b) Calcula la fracción iluminada de la Luna los días:

- i) 1 de enero
- ii) 6 de enero
- iii) 31 de enero
- iv) 21 de febrero

c) ¿Cuántas veces hay luna llena? ¿Qué días pasa?

d) ¿En qué fechas de enero y febrero la Luna no está iluminada en absoluto?

e) ¿En qué días la luna está en cuarto creciente?

f) ¿En qué días la luna está en cuarto menguante?

La modelización de la iluminación de la luna es una función circular y si no se representa la función no se pueden resolver la mayoría de las cuestiones del problema. Sin embargo, con la ayuda de la calculadora se pueden resolver gráficamente todas las cuestiones que se plantean.

Se observa en primer lugar, que las medidas angulares se expresan en radianes (números reales).

Se establece para t=0 el 1 de enero.

Con el Menú 5: Gráfico se representa la función $M(t)=\frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi t}{15}\right)+\frac{1}{2}$:

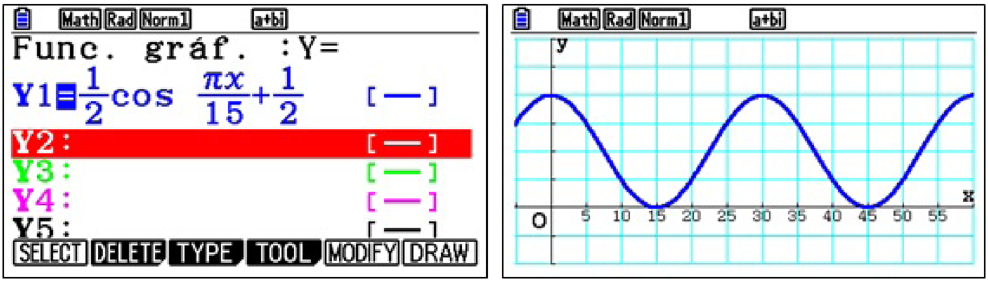

Figura 13

b) El 6 de enero se corresponde con t=5, el 31 de enero con t=30, el 21 de febrero con t=51:

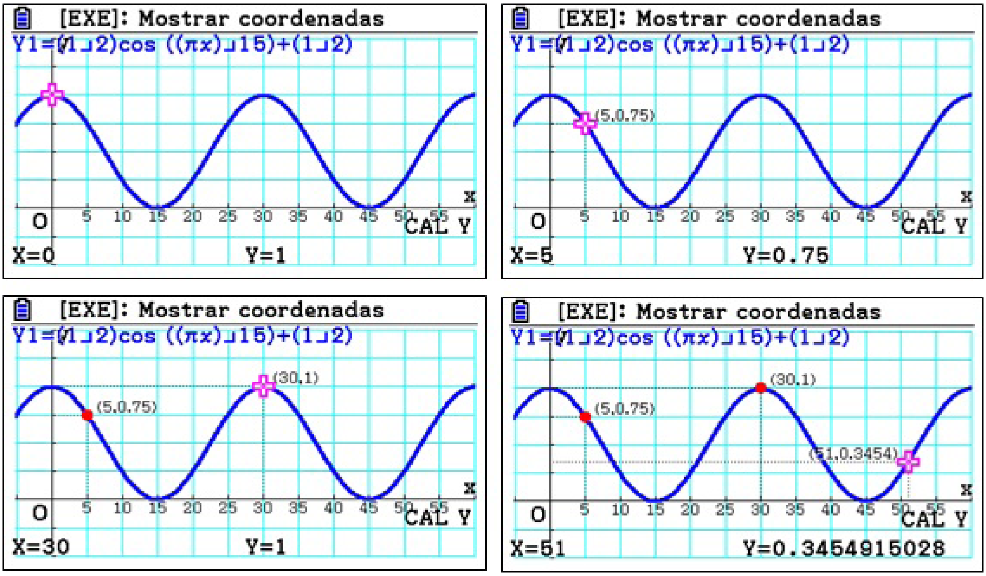

Figura 14

A partir de los resultados obtenidos gráficamente se concluye que el 1 de enero hay luna llena. El 6 de enero la iluminación de la luna es 0,75 y hay luna decreciente. El 31 de enero hay luna llena. Y el 21 de febrero solamente hay 0,35 de luna iluminada y luna creciente.

Con el Menú 7: Tabla, también se pueden calcular todos los valores día a día:

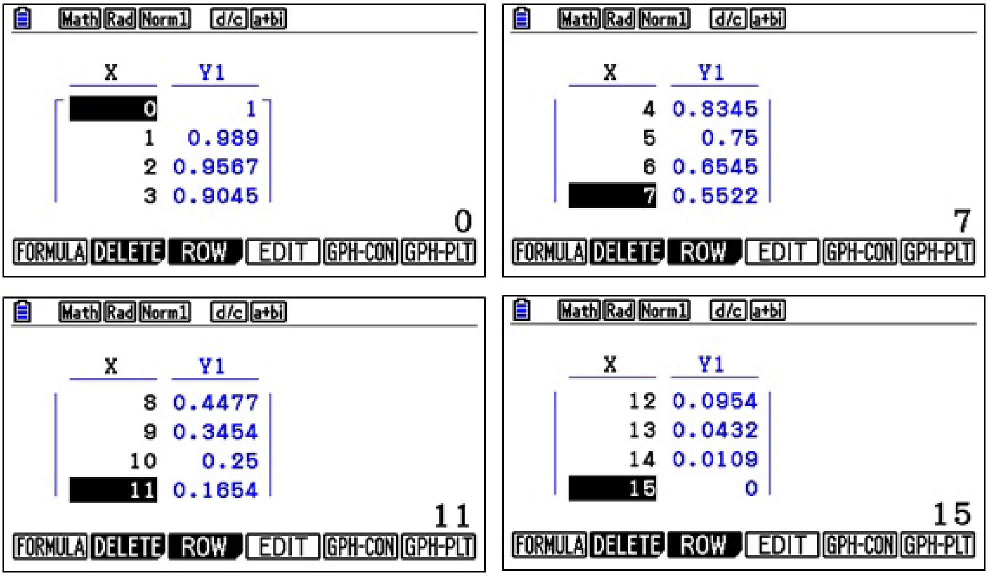

Figura 15

Desde el Menú 5: Gráfico se puede dar respuesta a todas las preguntas sobre las fases de la luna. La luna llena es el máximo y la luna nueva el mínimo. El cuarto creciente se obtiene cuando $M(t)=\frac{1}{4}$ y la gráfica es creciente y el cuarto menguante cuando $M(t)=\frac{1}{4}$ y la gráfica es decreciente:

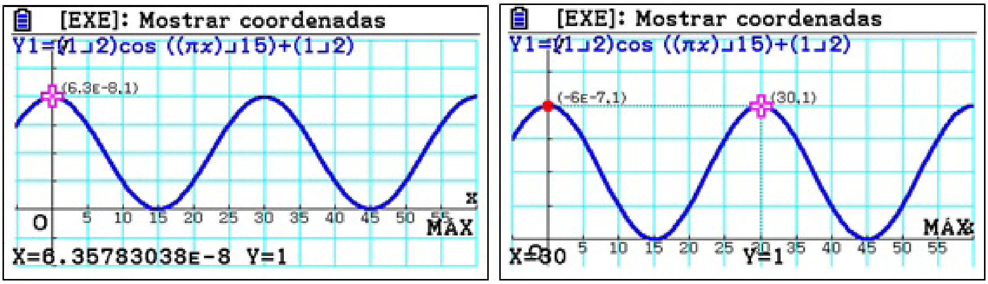

Figura 16

c) Hay dos veces luna llena, los días 1 y 31 de enero.

d)

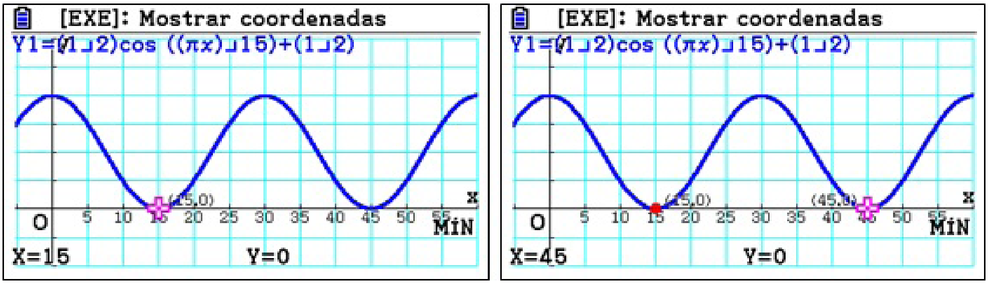

Figura 17

La luna no está iluminada los días 16 de enero y 15 de febrero.

e) **f)**

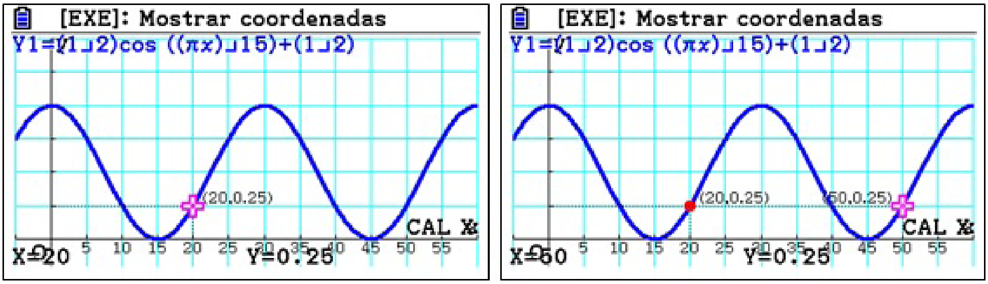

Figura 18

El cuarto creciente se produce el 21 de enero y el 20 de febrero.

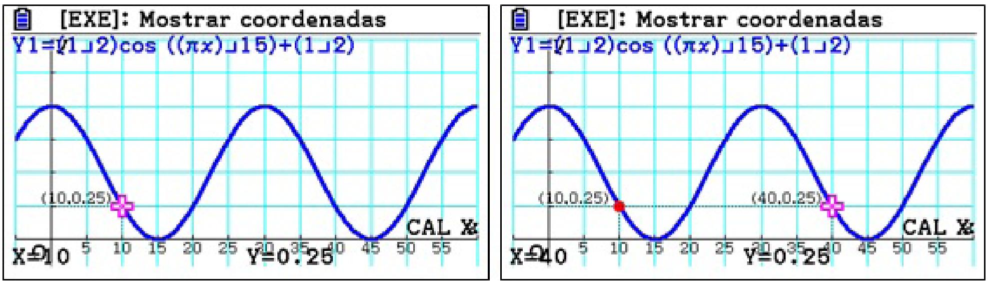

Figura 19

El cuarto menguante se produce el 11 de enero y el 10 de febrero.

La matematización del contexto de enseñanza-aprendizaje se impulsó a partir de la década del setenta del siglo pasado con la Educación Matemática Realista (EMR) basada en la idea de Freudenthal (1973, 1991) de las matemáticas como actividad humana. El punto de partida de la matematización del contexto es la selección de un contexto real o realista, cuyo objetivo es partir de las situaciones abordar diversos conocimientos matemáticos. Es evidente que los contextos reales o realistas deben estar presentes en las aulas de todas las etapas educativas. Sin embargo, hay que tener en cuenta que enseñar competencialmente las matemáticas no significa quedarse en lo concreto, sino que a través de la actividad matemática el alumnado debe conseguir formalizar de manera progresiva su conocimiento matemático. La formalización o abstracción de muchos conceptos matemáticos requiere que esta se haga de forma descontextualizada o que el contexto sea matemático. Por ello es también importante plantear situaciones o problemas, que en un contexto matemático, permitan al alumnado explorar, razonar y conectar las ideas matemáticas dentro de las matemáticas. La siguiente actividad pretende mostrar cómo la interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales contribuye a dotar de significado su resolución y a conectar el algebra con la geometría.

Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x-y-z=4 \\ 4x+y-3z=2 \end{cases}$

Interpretar geométricamente el resultado.

Con la calculadora gráfica se pude resolver el sistema de dos maneras:

1. Por el método de Gauss.

Se define la matriz ampliada del sistema:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1|3 \\ 2 & -1 & -1|4 \\ 4 & 1 & -3|2 \end{pmatrix}$$

y se triangulariza usando la calculadora:

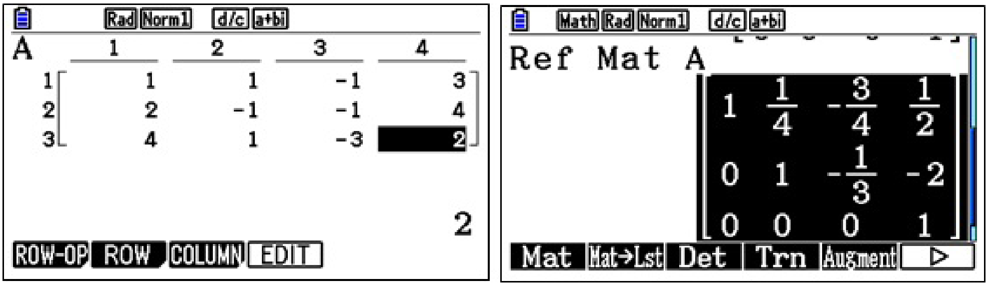

Figura 20

De la última fila se deduce que el sistema es incompatible.

2. Directamente con el Menú A: Ecuación:

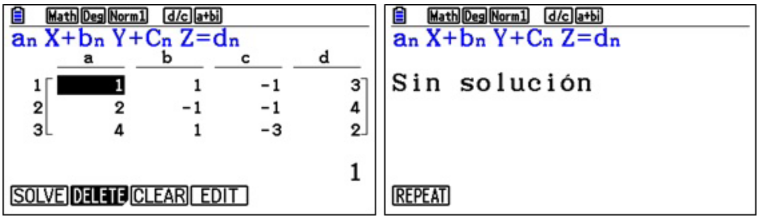

Figura 21

Para interpretar el sistema geométricamente, se debe saber que una ecuación lineal con tres incógnitas es un plano en el espacio.

Con el Menú K: Gráfico 3D, se define la ecuación de cada uno de los tres planos y se representan gráficamente:

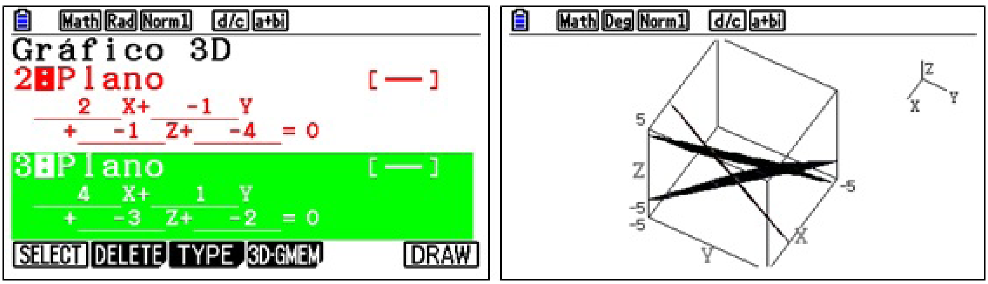

Figura 22

En la pantalla gráfica se observa cómo los tres planos intersectan dos a dos en una recta y por tanto el sistema no tiene solución. El problema puede finalizar con esta observación, ahora bien, cuando se trabaja en un entorno de resolución del problemas lo más importante no es llegar a dar una respuesta, sino aprender todo lo que se pueda de la situación. Es posible que el alumnado no sepa cómo seguir aprendiendo en esta situación concreta, pero como docentes tenemos la responsabilidad de que aprenda a hacerse preguntas y en el caso de que esto no suceda, no tenemos más remedio que lanzarlas nosotros. Por ejemplo, ¿cómo serán las rectas que se obtienen de las intersecciones de los planos dos a dos?

Con la ayuda de la calculadora la obtención de las ecuaciones de las rectas es una tarea rápida y sencilla por lo que nos deja un tiempo inestimable para la reflexión.

Se determina la recta intersección de los planos dos a dos:

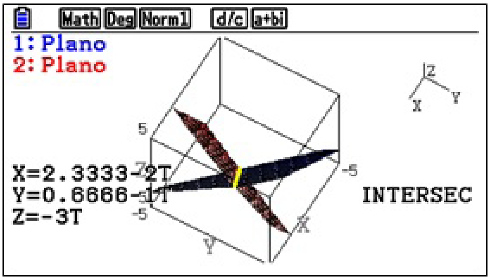

Figura 23

$$r_{12} \equiv \begin{cases} x = \dfrac{7}{3} - 2\alpha \\ y = \dfrac{2}{3} - \alpha \\ z = -3\alpha \end{cases}$$

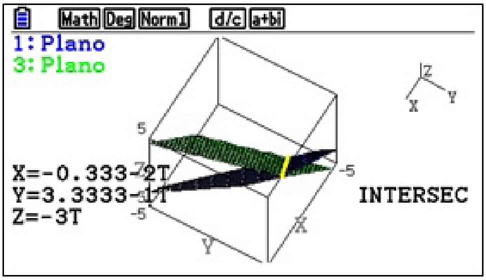

Figura 24

$$r_{13} \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} - 2\alpha \\ y = \dfrac{10}{3} - \alpha \\ z = -3\alpha \end{cases}$$

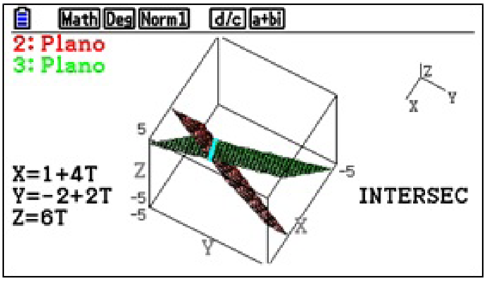

Figura 25

$$r_{23} \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = 6\alpha \end{cases}$$

De las ecuaciones paramétricas se deduce que las tres rectas son paralelas (observar los vectores directores de las tres).

Se puede comprobar gráficamente que las tres rectes son paralelas:

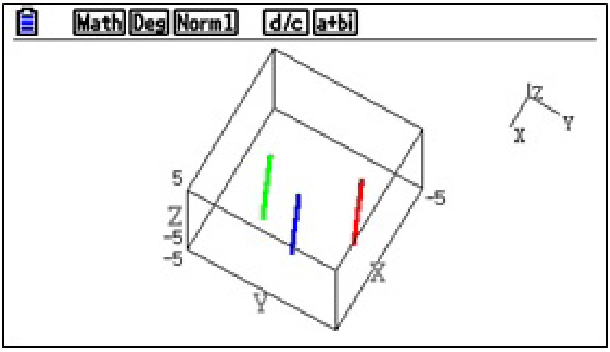

Figura 26

Se puede estudiar ahora la posición relativa de las tres rectes y comprobar que las rectas son paralelas dos a dos:

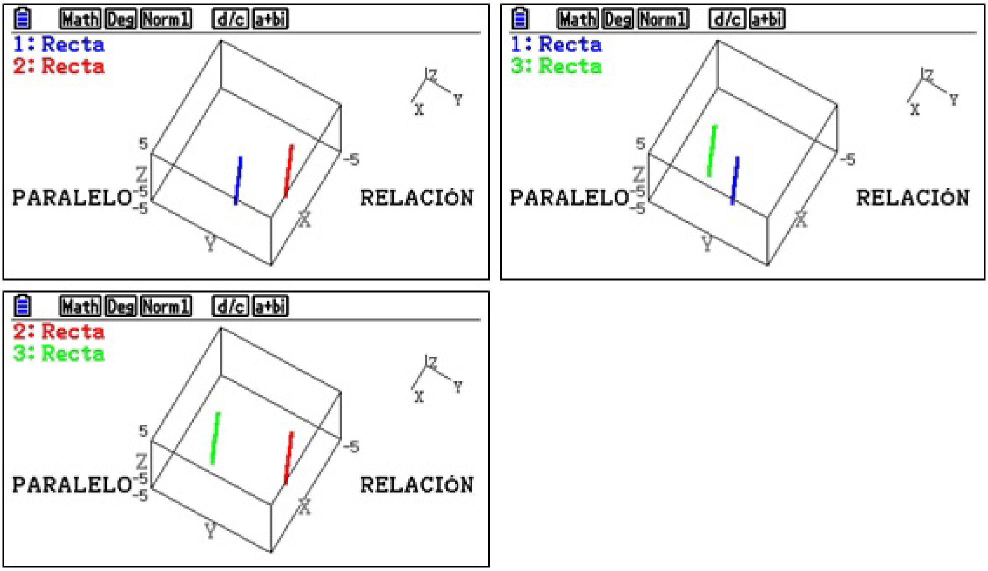

Figura 27

CONCLUSIONES

Analizar los diferentes modelos funcionales; manipular el lenguaje algebraico para resolver situaciones de ámbito científico con el apoyo de medios tecnológicos que ayuden a interpretarlas y dotar de significado las ideas matemáticas; utilizar los elementos de la geometría, sus propiedades y operaciones para resolver situaciones geométricas en contextos reales o realistas y también en contextos académicos; analizar distribuciones estadísticas bidimensionales utilizando los parámetros estadísticos más usuales con la tecnología más adecuadas para tomar decisiones en contextos científicos son, entre otros, contenidos para la evaluación de la competencia matemática, de la competencia digital y de la competencia básica en ciencia y tecnología, dentro del currículo de bachillerato y donde se cita expresamente el uso de la calculadora gráfica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Contreras, M. (2010). La competencia matemática con la calculadora gráfica Classpad 330. *Epsilón Revista de Educación Matemática, 76*, 9-31.

Dutarte, P, y Verlant, B. (2010). *Mathématiques Terminale.* Vannes: Éditions Foucher.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Reidel Publishing Co.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrectht: Kluwer Academic Publishers.

Haese, M., Haese, S., Humphries, M., Kemp, E. y Vollmar, P. (2014). *Mathematics for the international student 10E (MYP5 Extended).* Marleston: Ed Haese Mathematics.