Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2018, nº 100, 99-124

RINCÓN "SAPERE AUDE"… ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

INTRODUCCIÓN

Matemáticas: ¿dónde comenzó todo?

Como anunciábamos en el numero anterior, este sub-apartado lo vamos a dedicar a algunas ideas sobre lo que significó el **pitagorismo.**

Pitágoras es de todos los filósofos de la alta antigüedad el más conocido y, por así decirlo, sigue siendo el más popular. Sabemos, sin embargo, muy poco de sus doctrinas: no tenemos trabajo de él, sino solo algunos fragmentos de uno de sus discípulos llamado Filolao de Crotona (449 a.C-350 a.C).

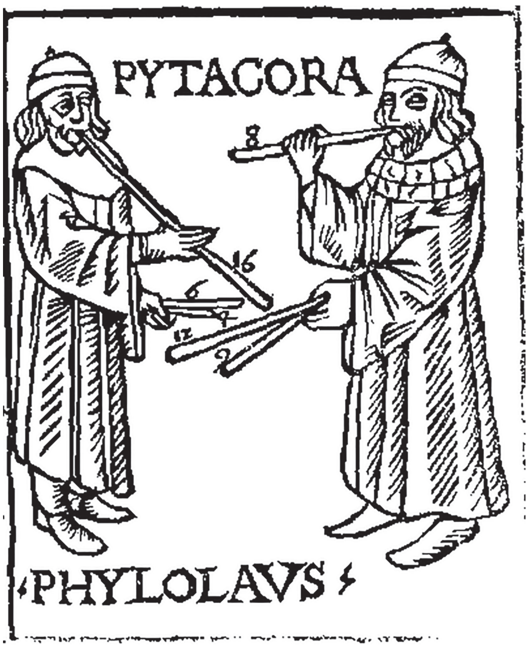


Figura 1. (Xilografía del medioevo que muestra a Piatágoras y Filolao con instrumentos musicales) https://es.wikipedia.org/wiki/Filolao.

Incluso es imposible, para nosotros, distinguir la enseñanza del maestro de las teorías de los discípulos. Solo podemos hablar de pitagorismo, sin pretender saber lo que pensaba Pitágoras. Además, la mayor parte de la información que se ha mantenido, dispersa en una gran cantidad de libros, merece poca confianza. Pitágoras pronto se convirtió en una figura legendaria: ha funcionado muy mucho la fantasía de los poetas y escritores. Nada es más difícil que desentrañar, entre tantas historias fabulosas o contradictorias, la parte de verdad que contienen.

Hay que distinguir dos aspectos en el pitagorismo: uno filosófico como la explicación del universo y otro la doctrina moral.

La filosofía pitagórica se resume en***: todo lo que existe es un número***. La esencia y el principio de las cosas es el número. Para comprender el significado de esta expresión, aparentemente extraña, debe recordarse que los pitagóricos estaban bien versados en el estudio de las matemáticas. También demostró por primera vez el conocido teorema sobre el cuadrado de la hipotenusa, y su alegría fue tan grande después de este descubrimiento que ofreció un sacrificio solemne a Júpiter. Consecuentemente hay que suponer que muchos matemáticos *bien entrenados* han estado dispuestos a ver los números en todas partes.

Se dice que Pitágoras, un día en una fragua, notó que los martillos, al caer sobre los yunques, hacían diferentes sonidos, y que estos sonidos variaban según el tamaño de los martillos. Cualquiera que sea el valor que se le dé a esta historia, cuya autenticidad se ha discutido, al menos es probable que demuestre que las observaciones atentas y juiciosas llevaron a Pitágoras a una concepción del mundo al principio muy extraña. También había observado que los sonidos de la lira son proporcionales a la longitud de las cuerdas y, en consecuencia, que una rigurosa ley matemática regula la producción de sonidos. Al generalizar esta idea, Pitágoras concluye que todo en el mundo físico obedece a las leyes del número, (verdad confirmada por la ciencia moderna).

Sus discípulos abusaron de esta fórmula ya excesiva, y terminaron en extravagancias reales, como decir que la justicia es el número cuatro, o que el matrimonio es el número cinco. Pitágoras no es responsable de estas locuras. Al margen de las aplicaciones ilegítimas que se hicieron, su idea básica era correcta: ***visión de genio.***

Todos los pitagóricos no cayeron en estos excesos, y su buena fortuna deseaba que algunos, por una especie de casualidad, sin duda, o de adivinación, y sin poder justificar sus afirmaciones por razones sólidas, debieran ser conducidos a las concepciones. Muy extraordinario por el tiempo que vivieron. Así declararon que debe haber antípodas, y se dice que cuando Cristóbal Colón emprendió su viaje, ***estaba en la fe de una tradición pitagórica*** y habían adivinado el movimiento de la tierra. Copérnico declaró expresamente que cuando descubrió el verdadero sistema del mundo y demostró que es la Tierra quién se mueve alrededor del Sol, se inspiró en la idea ya expresada por los pitagóricos: ***una verdad***.

Referente a su doctrina moral más que a sus teorías filosóficas es cuándo Pitágoras alcanza mayor éxito, y por tanto la fama. En esto, los historiadores no se ponen de acuerdo: entre su filosofía y su moralidad, es difícil percibir cualquier conexión. Algunos historiadores creen que son bastante independientes entre sí. Como ha demostrado el historiador alemán A. Schwegler, es probable que Pitágoras, que pertenecía a la raza doriana, notable entre todas las razas griegas por su austera moral y sus rígidas virtudes (los espartanos eran dorios), se uniera en un cuerpo de doctrina, y formulado de una manera más precisa, las ideas que había conocido desde la infancia, y que eran familiares para todos sus compatriotas.

Pitágoras había fundado un Instituto, una especie de orden, un monasterio, donde él y sus discípulos, entre los cuales se encontraban algunas mujeres, vivían bajo leyes comunes de gran severidad. "*…El reclutamiento de los miembros de la orden",* dice M. Chaignet, *"se realizó con mucho cuidado. Pitágoras estudió severamente la vocación de los jóvenes que se le presentaban, antes de admitirlos en las primeras iniciaciones de esta nueva vida; procuró leer en sus rostros, adivinar en su modo de andar, en sus actitudes, en todos los hábitos de su persona, las inclinaciones de sus almas, el verdadero trasfondo de su carácter, las aptitudes propias de su espíritu….".* Incluso después de estas pruebas, solo unos pocos fueron introducidos en la doctrina del Maestro que entre todos los miembros de la hermandad la propiedad era común y que debían restringirse al silencio, abstenerse de comer carne y frijoles, pero estos detalles se cree que no son verdad, sobre todo la última afirmación. Lo que es incontestable es que Pitágoras se había fijado una meta moral y religiosa.

Afirma el historiador Ed. Zeller, *"…Quería fundar una escuela de piedad, buena moral, templanza, valor, orden, obediencia a la ley, fidelidad en la amistad…De manera general, deseaba hacer florecer en su escuela todas las virtudes que formaban al hombre honesto según las ideas griegas, y particularmente de acuerdo con las ideas y virtudes que también se recomiendan preferiblemente en las oraciones más o menos auténticas atribuidas a Pitágoras.* "

Es a este carácter moral y religioso al que se debe que las teorías pitagóricas están relacionadas con la transmigración de las almas, o la metempsicosis. Los cuerpos son como prisiones en las que la divinidad ha encerrado a las almas para castigarlas. Separado del cuerpo, el alma, cuando ha merecido una recompensa en virtud de sus virtudes anteriores, conduce a un mundo superior, a una vida incorpórea. Si ha sido culpable, debe ser castigada e incluso condenada a hacer nuevas peregrinaciones a través de cuerpos de hombres o animales.

La asociación pitagórica tenía un carácter político muy marcado. La forma más importante de gobierno entre los dorios era el gobierno aristocrático. Los pitagóricos en todas partes ejercieron su influencia, que parece haber sido considerable, al servicio del partido aristocrático, y lucharon con todas sus fuerzas por la democracia en las ciudades de la Gran Grecia: eran especialmente maestros en Crotona donde Pitágoras pasó los últimos años de su vida.

Figura 2. Archytas de Taretum. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Archytas.html.

En una escuela que tenía tanta preocupación por las cosas morales y el sentido de organización política, es imposible que las teorías educativas no ocupen un lugar grande. El testimonio preciso nos dice que Pitágoras había escrito un tratado sobre educación; pero, por otro lado, hay razones suficientes para creer que Pitágoras no había escrito nada. En cualquier caso, uno de sus seguidores, Archytas de Tarentum (428 a.C.-350 a.C), había publicado un tratado sobre educación moral.

En cierto sentido, se puede decir que ***todo pitagorismo, previsto en su doctrina moral,***

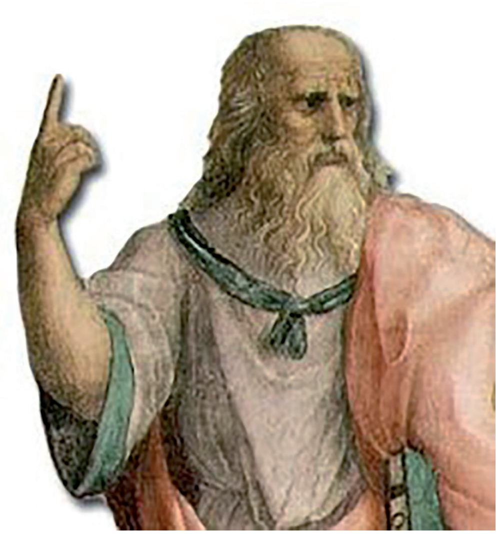


Figura 3. Platón. http://www.philosophica.info/voces/platon/Platon.html

era pura pedagogía. Hemos visto ut-supra con qué exquisitez y cuidado Pitágoras elegía a sus discípulos, las pruebas a las que los sometía, las iniciaciones sucesivas después de las cuales los clasificaba en varias categorías, por lo que podemos arriesgarnos a afirmar que podía considerarse como parte de la ***educación integral*** del individuo. Desafortunadamente, sobre los detalles de esta educación, tenemos muy poca información. Solo sabemos que los pitagóricos atribuían gran importancia a la gimnasia y la música: era necesario establecer entre el cuerpo y el alma una armonía lo más perfecta posible. Sobre todo, prescribieron a los jóvenes:

- La piedad hacia los dioses y la obediencia a las leyes del país que, según dijeron, no deberían modificarse a la ligera para imitar a las de otros países.
- No hay mal mayor que la falta de leyes, sin autoridad, los hombres no pueden subsistir.
- Los jóvenes debían ser educados para el estado, el respeto a los ancianos, la fidelidad a sus amigos, la moderación en todo, estas eran las principales virtudes a las que se ejercitaban.
- "...No es necesario", dijo Pitágoras, "expulsar el placer de la vida, pero es necesario ahuyentar los placeres vulgares, y admitir solo el placer que viene después de lo que es justo y hermoso…".

Hay motivos para creer que Platón, quien en su obra la *República* y en las *Leyes* ha entendido bien la importancia de la educación y ha desarrollado teorías, de manera tan favorable sobre este tema que se ha inspirado repetidamente en Pitágoras.

Al final de su vida, precisamente cuando estaba escribiendo la República, Platón estaba cada vez más dispuesto a acercarse a Pitágoras y apropiarse de sus principales doctrinas. En la República, por ejemplo, cuando explica cómo instruir a los jóvenes, hace una referencia directa a los pitagóricos. Para él, como para Pitágoras, como se ha indicado, la gimnasia y la música son los medios principales de educación, al menos lo que debe darse a todos los ciudadanos. Uno puede considerar, sin temor a equivocarse, la pedagogía de Platón como el desarrollo de la de Pitágoras: es a través de Platón que percibimos con mayor claridad las teorías pitagóricas sobre la educación.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 99)

En el número 99 proponía dos ejercicios: a) en el primero, los conceptos de modelización y optimización se conjugan para obtener la forma y las dimensiones de un canal. Se trata de un interesante ejercicio (propuesto por M.F Guissarda en Losanges, nº40, págs. 34-39) de modelización fácilmente adaptable a diferentes niveles de enseñanza que en los que se puede desarrollar diferentes variantes y que me permito presentar sólo aplicado a un canal de sección y longitud fija. Y b) un segundo, conocido como el teorema de Napoleón. La leyenda atribuye este teorema al emperador Napoleón Bonaparte. El matemático italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) le habría dicho: "*General, esperábamos todo de usted, excepto las lecciones de Geometría*". Quizás este no sea el único hecho de las armas matemáticas de Napoleón. También se le atribuye una construcción que permite determinar con la ayuda de la única brújula el centro de un círculo dado

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

JOYITA a)

a) *Construir una sección de un canal de capacidad máxima que se puede obtener, en planta, a partir de una hoja de zinc rectangular de 21cm de ancho paralelamente a su longitud.*
NOTA: Se puede utilizar una hoja DIN-A4 para comprender la multitud de pliegues posibles.

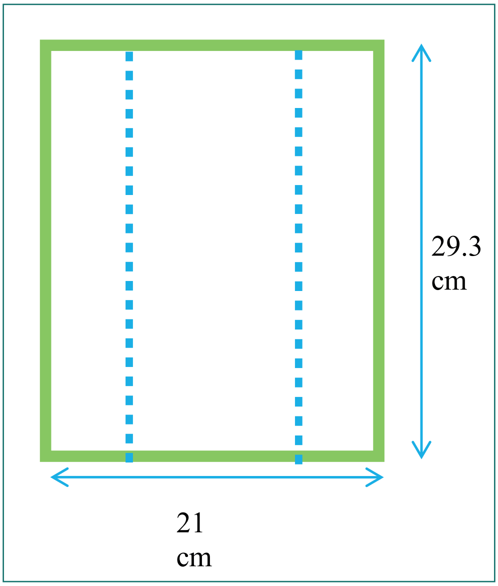


Figura 4. Canal.

SOLUCIÓN

Paso 1

Para trabajar, consideremos una hoja DIN-A4 e indicar a los alumnos la variedad de pliegues posibles que podemos hacer. Una cierta habilidad, en la manipulación, nos puede ayudar a tomar conciencia de las diferentes variables que entran en juego, y que las diferentes partes del canal (de la misma longitud) no tiene la misma capacidad.

Con esta fase de iniciación del ejercicio las cuestiones de optimización se pueden presentar de varias maneras.

Si preguntamos: ***¿Cuál es el canal de capacidad máxima que se puede obtener plegando una plancha de zinc de 21 cm. de ancho paralelamente a su longitud?***

Con estas condiciones y restricciones, el problema no es accesible para el nivel de secundaria. Por lo tanto, hay que insistir al alumno que debe tomar conciencia de que hay que añadir algunas condiciones de restricción suplementaria. Otra dificultad añadida es comprender que, para construir un canal de capacidad máxima, es necesario maximizar el área de la sección perpendicular a la longitud del canal.

De todos los casos particulares, con grados de dificultad creciente:

- Canal con sección rectangular de longitud fijada.
- Canal con sección rectangular de longitud indeterminada L.
- Canal con sección trapezoidal (dividido en tres partes iguales)
- Canal con sección trapezoidal y pliegue simétrico.

voy a presentar el primero de la siguiente manera:

Plegando en ángulo recto, paralelamente a longitud, los dos bordes de una tira de zinc de 21 cm de largo, se forma un canal. Determinar las alturas de los bordes para que la capacidad del canal sea máxima.

Paso 2

En primer lugar, iniciemos el proceso con una sección del canal de, por ejemplo, cuatro metros de largo.

Hay que partir de la suposición que el fondo del canal es horizontal. En este contexto, los alumnos son inmediatamente persuadidos que las alturas de los dos bordes, que notamos h_{b1} y h_{b2} sobre la figura adjunta, deben ser iguales.

En efecto, en caso contrario, el agua saldría desbordada inmediatamente por nivel que *tuviese el borde menos alto.*

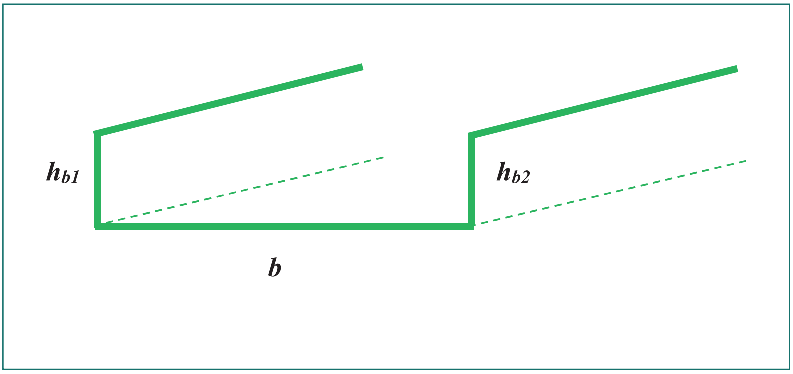


Figura 5. Simetría del pliegue (I).

En este caso, tendremos ***zinc que no se utiliza*** del otro lado. Si dividimos en dos partes la parte que excede para ponerla en el otro lado, se aumentaría la capacidad del canal. De esta observación, se deduce que los dos bordes deben ser de la misma altura, denotémosla por ***h***.

La capacidad del canal se calcula entonces por la fórmula del volumen de un paralelepípedo rectángulo

$$V=B\,.\,h$$

La altura a determinar, h, será entonces la variable. Expresamos entonces las dimensiones de la base en función de esta variable.

La base será de ancho $b=21-2h$ y de longitud $L=400$ ***cm.***

Paso 3

Tendremos el volumen V expresado por la función

$$V(h)=400(21-2h)\,h=400(21h-2h^2)$$

Ordenando la expresión, obtenemos el volumen

$$V(h)=400(-2h^2+21h)$$

En función de la variable ***h*,** y tendremos que buscar de que valor se trata de ***h*** para que el volumen sea máximo.

Notemos que los estudiantes que primero comprendieron que es la sección la que determina la capacidad no pasarán por este paso, lo cual es indispensable para los demás.

El volumen V es una función de segundo grado en ***h***

$$V(h)=400(-2h^2+21h) = -800h^2 + 8400$$

Su gráfica es una parábola dónde la concavidad es hacia abajo. Los alumnos pueden representarlas, eventualmente con cualquier programa por ordenador y remarcar que el valor máximo del volumen $V(h)$ se encuentra en el punto cumbre de la parábola.

Es también la ocasión de investigar la parte de la gráfica que corresponde al problema de interpretar los valores límites $h=0$ y $h=10.5$. El resto se comprende que es la abscisa del punto cumbre que proporciona el valor de ***h*** que realiza en ordenada el valor máximo de $V(h)$.

La respuesta a esta cuestión propuesta es entonces un canal que tiene de largo en la base 10,5 cm y los dos bordes verticales medirán 5,25cm (figura 6).

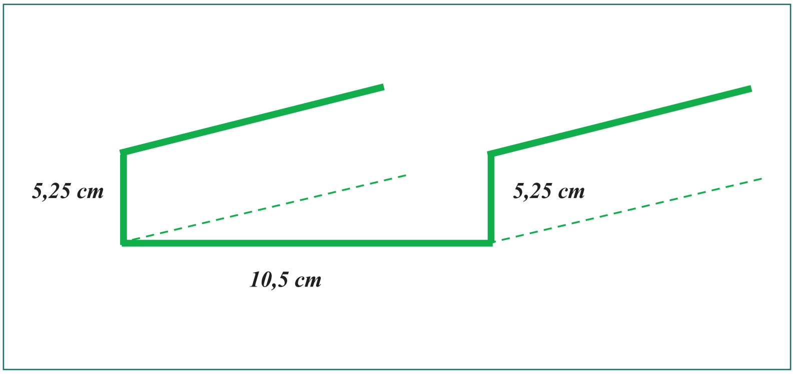


Figura 6. Simetría del pliegue (II).

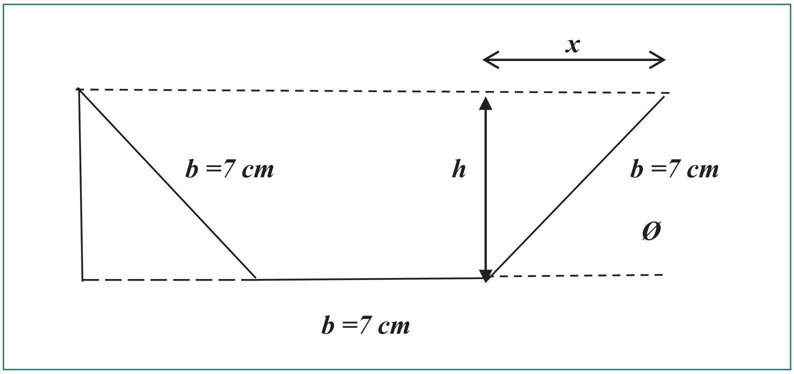


Figura 7. Sección trapezoidal.

Nota:

a) A partir de aquí es interesante proponer a los alumnos que se reemplace los 400 cm por un canal de longitud genérica ***L*** para un canal de sección rectangular. ¿Qué pasará con la solución? Puede servir como ejercicio de entrada para el concepto de derivada.

b) Se puede también estudiar el canal de sección trapezoidal con base ***b*** dada plegando dos veces (figura 7) plegando dos veces una plancha de zinc de 21 cm de ancho paralelamente a su longitud de manera simétrica con la se puede obtener un canal. ¿Cuál es el canal de capacidad máxima? En este caso la figura anterior ilustra la situación y pone en evidencia tres variables posibles, dos funciones irracionales y una trigonométrica:

- ***h,*** altura de la sección trapezoidal isósceles.
- ***x***, la longitud de la proyección de la pared oblicua del canal sobre la dirección horizontal.
- ***Ø***, el ángulo agudo formado por la horizontal y el borde del canal.

- **c)** Y finalmente, también, plegando dos veces una plancha de zinc de 21 cm, paralelamente a su longitud, de manera simétrica (pero no necesariamente la tercera parte de su longitud) se puede presentar así la base así: ***b=21-2y*** en función de los bordes del canal que notaremos por ***y***.

Con todo ello tenemos la posibilidad de dar a los alumnos una perspectiva hacia cuestiones y conceptos matemáticos más avanzados que deben ser introducidos en función del nivel que se esté enseñando.

JOYITA b)

Figura 8. Emperador Napoleón Bonaparte.

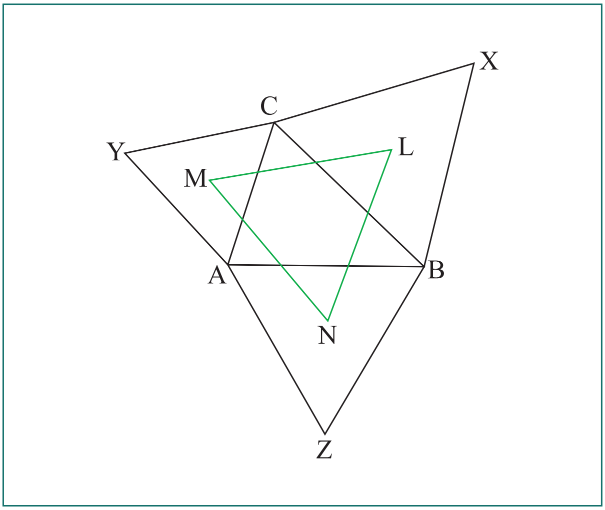


Figura 9. Teorema de Napoleón.

- **b)** *Sea un triángulo cualquiera ABC. Si se construyen tres triángulos equiláteros a partir de sus lados, entonces los centros de los triángulos equiláteros es también un triángulo equilátero. (Teorema de Napoleón).*

Notas

- **a)** *Un teorema análogo es cuando los triángulos equiláteros se construyen en el interior de los lados de un triángulo y el denominado triángulo interior de Napoleón también es equilátero.*
- **b)** *Es sorprendente como la diferencia entre las áreas de los triángulos de Napoleón, exterior e interior, es igual al área del triángulo original*

SOLUCIÓN

Paso 1

Veamos la demostración dese el punto de vista de la geometría clásica tan olvidada en los currículos actuales.

Los triángulos MCL y ACX son semejantes con una razón de semejanza igual a , fácilmente comprobable. En efecto:

En el triángulo CYA

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$CA=l;\ CM= (2/3)h;\ CM = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}l\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}l$$

De aquí

$$\frac{CA}{CM} = \frac{l}{\frac{\sqrt{3}}{3}l} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Análogamente

$$\frac{CX}{CL} = \sqrt{3}$$

Y los ángulos MCL y ACX son iguales.

Paso 2

En lenguaje más moderno: por semejanza directa (resultado de la composición de una homotecia y de una rotación) de centro C, ángulo ±30 grados y razón los puntos M y L se convierten en los puntos A y X.

De aquí inferimos que la longitud del segmento AX es igual a veces la longitud de ML.

Análogamente, razonando con los triángulos NBL y ABX se demuestra que la longitud de AX es también igual a veces las de NL. Así ML y NL tienen la misma longitud.

Se demuestra de igual forma –en comparación con BY– que LM y NM tienen la misma longitud.

En conclusión: NL = ML = NM y el triángulo es equilátero, csqd.

Nota

Para un nivel superior se recomienda al alumno que podemos trabajar utilizando los números complejos, partiendo de la expresión $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ y de las notaciones de la figura y partir del plano complejo con referencia ortonormal.

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 99)

Los apilamientos infinitos de radicales

$$\sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2\sqrt{a_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots}}}}$$

y la descomposición de un número en el producto de números primos será la base de las dos propuestas que presentamos en este número.

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

JOYITA a) Probar que

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\ldots.}}}}} = 3$$

SOLUCIÓN

Paso 1

Existen raíces continuas, sucesión de radicales embebidos, para representar cualquier número entero.

La estrategia o técnica consiste en encontrar una función que pueda introducirse en el radicando: una raíz continua que se contenga a sí misma.

Sea la función:

$$f(x) = \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\ldots\ldots\ldots}}}$$

Paso 2

Debemos hacer notar que la función se encuentra en segundo rango multiplicada por x:

$$f(x)=\sqrt{1+x.f(x+1)}$$

De aquí se tiene que elevando al cuadrado

$$[f(x)]^2=1+x.f(x+1)$$

Si es una función lineal, reemplazando en la expresión anterior se tiene

$$(ax+b)^2=1+x[a(x+1)+b]$$

$$a^2x^2+2axb+b^2=1+ax^2+(a+b)x$$

Paso 3

Para la constante b = 1

$$a^2x^2+2ax+1=1+ax^2+(a+1)x\Rightarrow a^2x^2+2ax=ax^2+ax+x$$
$$(a^2-a)x^2+ax-x=0\Rightarrow (a^2-a)x^2+(a-1)x=0$$
$$(a^2-a)x+a-1=0$$

La anterior ecuación se satisface para a=1 y se tiene que

$$f(x)=x+1$$

O en el caso numérico que nos interesa

$$x=2\Rightarrow f(x=2)=2+1=3$$

Con lo que llegamos a demostrar que

$$\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+\ldots}}}}}=4$$

Nota

a) Se ha visto que con x = 2, la raíz continua converge hacia 3 Análogamente con x = 3, tendremos que será 4,

$$\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+\ldots}}}}}=4$$

y así sucesivamente.

b) Podemos invitar al alumno que trabaje la técnica citada ut-supra y compruebe que $\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+....}}}}}=4$ es el número de oro $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618033$ solución de la ecuación

$$x^2\text{-}x\text{-}1=0$$

JOYITA b)

Demostrar que un entero natural ***n*** *que es al mismo tiempo el cuadrado* $\boldsymbol{n=p^2}$ *y el cubo* $\boldsymbol{n=q^3}$ *también* ***n*** *es el cuadrado de un cubo.*

Generalizando: Si ***a, b, n, m*** *son enteros naturales con* $\boldsymbol{n \wedge m = 1}$ *y* $\boldsymbol{a^n = b^m}$*. Demostrar que existe un número entero c tal que* $\boldsymbol{a = c^m}$ *y* $b = \boldsymbol{c^n}$*.*

SOLUCIÓN

A modo de indicación descompongamos ***a*** y *b* en factores primos e identificar las potencias de los exponentes y después utilizar el teorema de Gauss.

Paso 1

Vamos a contextualizar con detalles que es lo que nos están pidiendo en el ejercicio. Sea ***n*** un número entero que es a la vez un cuadrado y un cubo,

$$\boldsymbol{n=p^2}$$
$$\boldsymbol{n=q^3}$$

Y lo que se quiere probar es que existe un entero ***c*** tal que

$$\boldsymbol{n=(c^3)^2=c^6.}$$

Paso 2

Descompongamos ***n, p*** y ***q*** en producto de factores primos

$$n=a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3}.......a_p^{\alpha_p}$$
$$p=a_1^{\beta_1}a_2^{\beta_2}a_3^{\beta_3}.......a_p^{\beta_p}$$
$$q=a_1^{\gamma_1}a_2^{\gamma_2}a_3^{\gamma_3}.......a_p^{\gamma_p}$$

Por unicidad de la descomposición en factores primos puesto que $n=p^2$, se tiene que $\forall i \in [1,2,....p]$ y puesto que $n=q^3$, se tiene que $\begin{matrix} c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} p_3^{\gamma_3} ....p_p^{\gamma_p} \\ b = a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} a_3^{\beta_3} ....a_p^{\beta_p} \end{matrix}$ $\forall i \in [1,2,....p]$

Tenemos así que cada α_i es múltiplo de 2 y de 3, por lo tanto de 6, y $\alpha_{ii} = 6\phi$
Podemos, por ello, escribir que

$$c = a_1^{\phi_1} a_2^{\phi_2} a_3^{\phi_3} ....a_p^{\phi_p}$$

Y se tiene que $\boldsymbol{c^6=n}$.

Paso 3: Generalicemos

Descompongamos a et b en producto de factores primos

$$a = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} ....a_p^{\alpha_p}$$
$$b = a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} a_3^{\beta_3} ....a_p^{\beta_p}$$

La igualdad $a^n=b^m$ se traduce por $\boldsymbol{n\alpha_j=m\beta_j}$ para todo $j=1,2,…p$.
Se tiene entonces que m divide a $\boldsymbol{n\alpha_j}$ y puesto que $\boldsymbol{n \wedge m=1}$, se tiene que m divide también a $\boldsymbol{\alpha_j}$. Escribamos, pues, que $\boldsymbol{\alpha_j=m\gamma_j}$.
Por ello, encontramos que $\boldsymbol{nm\gamma_j=m\beta_j}$. Sea $\boldsymbol{\beta j=n\gamma_j}$. Así nos queda que

$$c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} p_3^{\gamma_3} ....p_p^{\gamma_p}$$

o también $\boldsymbol{a = c^m}$ y $b = \boldsymbol{c^n}$

SAPERE AUDE: RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS APORTADAS POR LOS LECTORES

El número 100 de una revista es síntoma de que la sociedad responsable de su edición está muy viva. En este sentido quiero agradecer a todos los lectores que dedican parte de su tempo a la lectura de la misma. Por eso quiero saldar mi deuda y compromiso con dos compañeros a los que no les contesté por razones técnicas en su día a la solución dada a los problemas que vengo planteando en la sección ***Rincón SAPERE AUDE… ¿resoviendo problemas?***

Soy consciente que ha habido un problema con la dirección de correo electrónico que aparece ut-infra. Habiéndose solucionado el problema, en este apartado que estará operativo siempre y cuando reciba ejercicios resueltos aportando nuevas, distintas e interesantes soluciones a las que yo puedo dar por los lectores de la revista EPSILÓN, aparecerán los autores de dichas aportaciones tal cual las presentan. En este caso, voy a adjuntar en formato WORD y PDF, las aportadas por Ricardo Barroso y Enrique Hoyos.

1. SOLUCIÓN DE RICARDO BARROSO (al ejercicio que se adjunta y que corresponde a la Propuesta 1, apartado (a), página 96 del número 97 de EPSILÓN)

a) Sea MNP un triángulo acutángulo. La bisectriz del ángulo en M corta al lado P en Q y al círculo β circunscrito al triángulo MNP en R. La tangente a β en N corta a MQ en S. Demostrar que si $MQ^2=2\ PQ^2$, entonces R es la mitad de MS (ver figura).

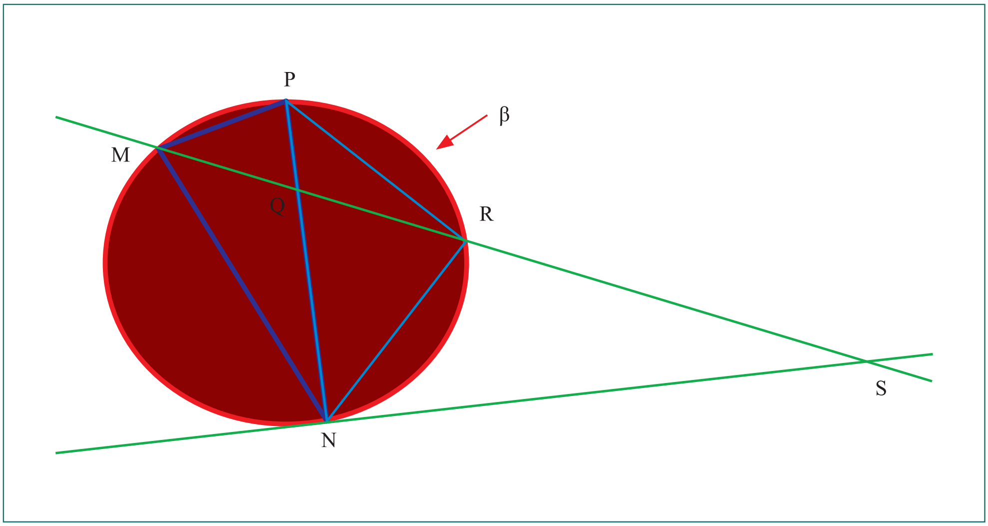


Figura 10. Triángulo acutángulo.

Sea PQ=t, MQ=$\sqrt{2}$t, PM=u

El triángulo RNQ es semejante al PMQ. Así, si RQ=v, es QN=$\sqrt{2}$v, y NR=$\frac{uv}{t}$. Siendo PR=NR=$\frac{uv}{t}$, por ser <PMR = <NMR, al ser MR bisectriz.

El triángulo MQN es semejante al PQR, luego $\frac{MN}{PR}=\frac{MQ}{PQ}=\frac{NQ}{RQ}$, de donde

Los triángulos SNR y SMN son semejantes, luego

$$\frac{SR}{SN}=\frac{SN}{SM}=\frac{NR}{MN}\rightarrow\frac{SR}{SN}=\frac{SN}{SM}=\frac{\frac{uv}{t}}{\frac{\sqrt{2}uv}{t}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Así, SN=$\frac{SR}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}SR$, SN=$\frac{\sqrt{2}}{2}SM$ de donde se obtiene lo pedido, SM=2SR.

Observaciones

1) ¿Cómo construir un triángulo MNP que cumpla los requisitos del enunciado?

Tomemos un segmento PQ de longitud t.
Tracemos el cuadrado PQRS de lado PQ.
Con centro en Q tracemos la circunferencia de radio QS.
Tomemos un punto M de dicha circunferencia.
Tracemos el triángulo PQM. Tracemos la recta simétrica de PM según el eje de simetría MQ, que cortará a la recta PQ en N. PMN es el triángulo pedido.

2) La propiedad se mantiene para los triángulos rectángulos y obtusángulos.

2. SOLUCIÓN DE RICARDO BARROSO (AL EJERCICIO QUE SE ADJUNTA Y QUE CORRESPONDE A LA PROPUESTA 1, APARTADO (B), PÁGINA 96 DEL NÚMERO 97 DE EPSILÓN)

b) Sea MNP un triángulo equilátero de altura 1 unidad de longitud. El círculo β de radio 1 y de centro situado en el mismo lado de MN que P es tangente a MN en un punto situado entre M y N. Mostrar que la longitud de arco de círculo situado en el interior del triángulo MNP es independiente del punto de tangente.

Sin pérdida de generalidad podemos tomar un sistema de coordenadas con el centro en el punto medio de MN.

Así, es P(0,1), $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right), N(\frac{\sqrt{3}}{3},0)$,

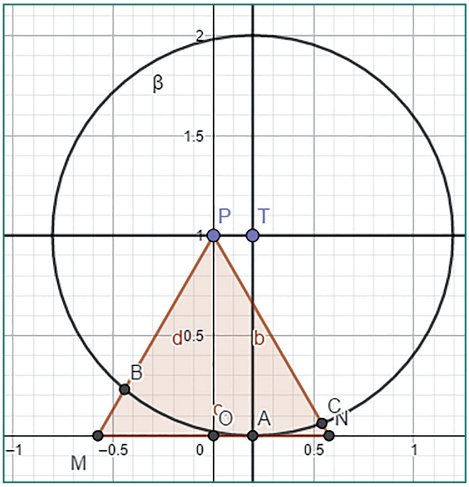


Figura 11. Triçangulo iquilçatero.

El centro de β está situado en $T(t,1)$, con $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ (figura 11).

Estudiemos las coordenadas de los puntos B, intersección de β con PM y C , intersección de β con PN.

La ecuación de β es:
$(y-1)^2+(x-t)^2=1$,
es decir $y^2-2y+x^2-2tx+t^2=0$

La recta PM es $\sqrt{3}x+1$

La intersección es
$B(\frac{t-\sqrt{4-3t^2}}{4},\frac{\sqrt{3}t-\sqrt{12-9t^2}+4}{4})$

Con respecto a PN, la ecuación es $y = -\sqrt{3}x + 1$

Y la intersección que nos interesa de la circunferencia es:

$$C\left(\frac{t+\sqrt{4-3t^2}}{4}, \frac{-\sqrt{3}t-\sqrt{12-9t^2+4}}{4}\right)$$

El vector BC es $\left(\frac{\sqrt{4-3t^2}}{2}, \frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$, cuyo módulo es constante e igual a 1.

De esta manera se concluye que el triángulo TCB es equilátero de lado 1, y por tanto la longitud de arco de círculo situado en el interior del triángulo MNP es independiente del punto de tangente, y mide π/3

3. SOLUCIÓN DE ENRIQUE HOYOS (AL EJERCICIO QUE SE ADJUNTA Y QUE CORRESPONDE A LA PROPUESTA 2, APARTADO (B), PÁGINA 128 DEL NÚMERO 95 DE EPSILÓN)

b) Si el radio del círculo más pequeño mide 2cm y que el del segundo círculo es de 3 cm, ¿cuál es el radio del tercer círculo?

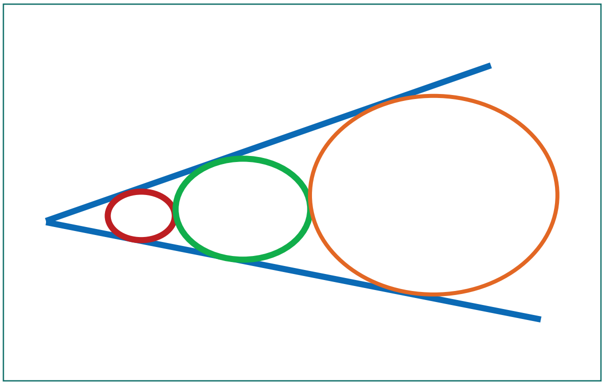
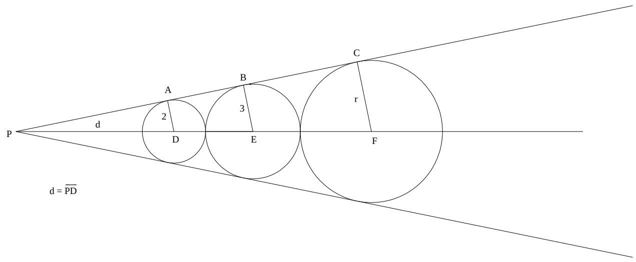


Figura 12. Triángulos equiláteros.

Epsilón 95. Rincón SAPERE AUDE. Soluciones de Enrique Hoyos Jiménez

b) Si el radio del círculo más pequeño mide 2 cm y el del segundo círculo es de 3 cm, ¿cuál es el radio del tercer círculo?.



$$\frac{\overline{PD}}{2}=\frac{\overline{PE}}{3}=\frac{\overline{PF}}{r}$$

Llamando $d=\overline{PD}$:

De la 1ª igualdad:

$$\frac{d}{2}=\frac{d+2+3}{3}\Rightarrow 3d=2d+10\Rightarrow d=10 \quad ;$$

Luego $\overline{PE}=10+2+3=15$; $\overline{PF}=15+3+r=18+r$;

Y en la 2ª igualdad queda:

$$\frac{15}{3}=\frac{18+r}{r}\Rightarrow 5r=18+r\Rightarrow 4r=18\Rightarrow r=\frac{9}{2}=4.5$$

Comentario a la solución del problema propuesto en Épsilon 92, sobre los ángulos en un triángulo isósceles:

Intenté resolver el problema, sin éxito, en tanto necesitaba alguna presunción sobre alineación de puntos o igualdad entre ángulos o lados que no he sabido demostrar.

Encuentro en la solución que aportas (en el número 93) que:

Figura 13.

Epsilón 95. Rincón SAPERE AUDE. Soluciones de Enrique Hoyos Jiménez

« El triángulo $\Delta AB'C'$ es equilátero con el ángulo en $\hat{A}$ de 60° »

Puedo entender que este triángulo es isósceles al estar construido mediante simetría, pero no veo la razón por la que se afirma que es equilátero. ¿Tendrías la amabilidad de explicarme este pormenor con algo de detalle?.

Un cordial saludo y agradecer de nuevo la bonita empresa que ha acometido.

Enrique Hoyos Jiménez

Figura 14.

4. SOLUCIÓN DE ENRIQUE HOYOS (AL EJERCICIO QUE SE ADJUNTA Y QUE CORRESPONDE A LA PROPUESTA 1, APARTADOS (A), (B) PÁGINA 107 DEL NÚMERO 96 DE EPSILÓN)

a) Si 2EO=AE, 2FO=FD y que ABCD es un cuadrado de lado 4 cm, ¿cuál es el área de la región coloreada en rojo?

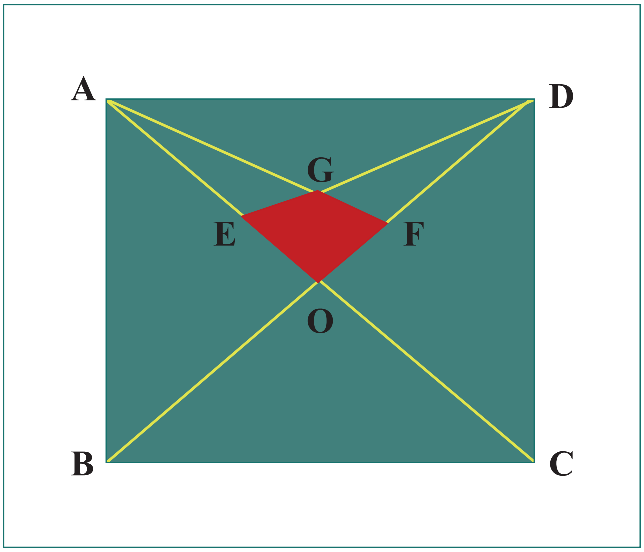


Figura 15. Región coloreada en un cuadrado.

c) *Sea ABCD un cuadrilátero tal que* $\widehat{CAD}=25^o$, $\widehat{ACD}=45^o$ *y* $\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=20^o$. *¿Cuánto mide el ángulo* $\widehat{DBC}$*?* (figuras 16 y 17).

5. SOLUCIÓN DE ENRIQUE HOYOS (al ejercicio que se adjunta y que corresponde a la Propuesta 2, apartados (a), (b) página 107 y 108 del número 96 de EPSILÓN)

a) Consideremos $x, y, z, t \in N$ *tales que*

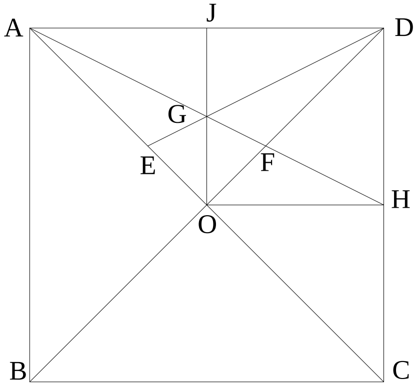
$$x<2y,\ y<3z,\ z<4t,\ \text{y}\ t<40.$$

¿Cuál es el valor mayor que puede tomar el número x?

b) ¿Cuántas combinaciones de tres (tripletas) números primos {x,y,z} satisfacen la ecuación $x+y2+z3=200$*?* (figura 18).

«Sapere Aude». Épsilon 96. Soluciones Enrique Hoyos Jiménez

96. 1.a.



Tomando O como origen de coordenadas, $OX=OH\,;OY=OJ\,;$ tenemos que:

$$H(2{,}0);\,A(-2{,}2);\,J(0{,}2);\,D(2{,}2);$$

Y dado que $2\overline{OF}=\overline{FD}$ se verifica $\overline{OF}=\frac{1}{3}\overline{OD}\Rightarrow F\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ y por simetría: $E\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Por otra parte: $\overrightarrow{AF}=\left(\frac{8}{3},-\frac{4}{3}\right)$ de modo que la ecuación de la recta AF es:

$$AF:\vec{x}=\vec{a}+t\,\overrightarrow{AF}=\left(-2+\frac{8}{3}t,2-\frac{4}{3}t\right)$$

En particular, para $t=\frac{3}{2}$: $\vec{x}=\left(-2+\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2},2-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)=(2{,}0)$. Luego $H\in AF$.

Y para el punto G: $-2+\frac{8}{3}t=0\Rightarrow 8t=6\Rightarrow t=\frac{3}{4}$. Por lo que $G(0{,}1)$.

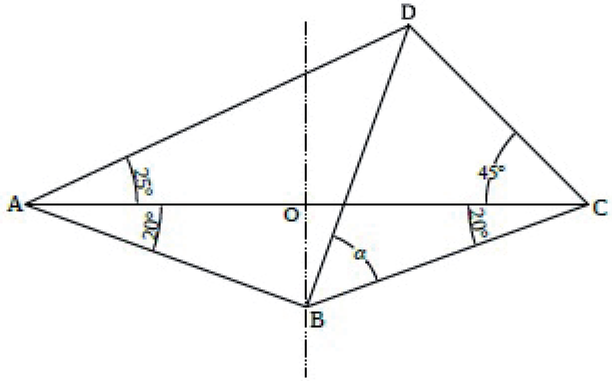
Por último, llamando S al área del cuadrilátero OFGE, se tiene que:

$$S=\|\overrightarrow{OG}\times\overrightarrow{OF}\|=\left\|\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0\end{vmatrix}\right\|=\left\|\frac{2}{3}\vec{e}_3\right\|=\frac{2}{3}$$

1 / 4

Figura 16.

96. 1.b.



Fijamos un sistema de referencia con origen en O, punto medio de $\overline{AC}$ y $OX = AC$.
$A(-r,0); C(r,0)$

$$\vec{d}=(-r,0)+t(\cos 25°, sen 25°)=(r,0)+v(\cos 135°, sen 135°)\Rightarrow \left\{\begin{matrix} t\, sen 25° = v\frac{\sqrt{2}}{2} \\ t\cos 25° + v\frac{\sqrt{2}}{2} = 2r \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$t=\frac{2r}{\cos 25° + sen 25°} \Rightarrow \vec{d}=\left(-r+\frac{2r\cos 25°}{\cos 25° + sen 25°}, \frac{2r\, sen 25°}{\cos 25° + sen 25°}\right)$$

$$\vec{b}=(0,z)=(-r,0)+s(\cos 20°, -sen 20°)\Rightarrow s=\frac{r}{\cos 20°}\Rightarrow z=-r\tan 20°$$

$$\overrightarrow{BC}=(r, r\tan 20°)\ ;\ \overrightarrow{BD}=\left(\frac{2r\cos 25°}{\cos 25° + sen 25°}-r, \frac{2r\, sen 25°}{\cos 25° + sen 25°}+r\tan 20°\right)$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\|\overrightarrow{BC}\|\|\overrightarrow{BD}\|}\right)=\arccos\left(\frac{r^2\left(\frac{2\cos 25°}{\cos 25° + sen 25°}-1+\tan 20°\left(\frac{2\, sen 25°}{\cos 25° + sen 25°}+\tan 20°\right)\right)}{r^2\sqrt{1+(\tan 20°)}\sqrt{\left(\frac{2\cos 25°}{\cos 25° + sen 25°}-1\right)^2+\left(\frac{2\, sen 25°}{\cos 25° + sen 25°}+\tan 20°\right)^2}}\right)$$

Calculadora en mano:

$$\alpha = \arccos 0.6427876097 = 0.8726646260\, rad = 50°$$

Luego

$$\widehat{CBD}=50°\ ;\ \widehat{DBA}=90°$$

2 / 4

Figura 17

«Sapere Aude». Épsilon 96. Soluciones Enrique Hoyos Jiménez

96. 2.a.

Sean $x, y, z, t \in N$ tales que $x<2y, y<3z, z<4t, t<40$. Equivalentemente

$$t \leq 39, z \leq 4t-1, y \leq 3z-1, x \leq 2y-1$$

Sustituyendo sucesivamente

$$t \leq 39 \Rightarrow z \leq 4 \cdot 39-1=155 \Rightarrow y \leq 3 \cdot 155-1=464 \Rightarrow x \leq 2 \cdot 464-1=927$$

Ha de ser entonces $x \leq 927$

96. 2.b.

La resolución de la ecuación $x+y^2+z^3=200$, con $x, y, z \in \wp$ (*primos*) ha de realizarse por tanteo, para lo que establecemos el siguiente programa:

```
n = 0;
comp[x_, y_, z_] :=
 (
  If[PrimeQ[x] && PrimeQ[y] && PrimeQ[z], {n++,
    Print["Tripleta ", n, " : (", x, ", ", y, ", ", z, ")"]}]
  );

For[x = 1, x < 198, x++,
 For[y = 1, y < 14, y++,
  For[z = 1, z < 6, z++,
   If[x + y^2 + z^3 == 200, {comp[x, y, z]}]
   ]
  ]
 ]
```

Con los siguientes resultados:

```
Tripleta 1 : (23, 13, 2)
Tripleta 2 : (71, 2, 5)
Tripleta 3 : (71, 11, 2)
Tripleta 4 : (167, 5, 2)
```

3 / 4

Figura 18.

c) En el siguiente cuadro de número

1 2 3
4 5 6
7 8 9

la suma de los elementos que están en las diagonales valen 15. Si escribimos cuadros que se construyen siguiendo el mismo criterio con:

- C1. Los números del 1 al 64.
- C2. Los números del 1 al 144.

«Sapere Aude». Épsilon 96. Soluciones Enrique Hoyos Jiménez

96. 2.c.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Por construcción de la tabla $a_{jk}=8(j-1)+k\ ;\ j,k=1,\ldots,8$. Luego:

$$tr(A)=\sum_{j=1}^{8} a_{jj}=\sum_{j=1}^{8}(8(j-1)+j)=\sum_{j=1}^{8}(9j-8)=8\cdot\frac{1+64}{2}=260$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

Similarmente al caso anterior, $a_{jk}=12(j-1)+k\ ;\ j,k=1,\ldots,12$. Por lo cual

$$tr(A)=\sum_{j=1}^{12} a_{jj}=\sum_{j=1}^{12}(12(j-1)+j)=\sum_{j=1}^{12}(13j-12)=12\cdot\frac{1+144}{2}=870$$

En el caso general $a_{jk}=n(j-1)+k\ ;\ j,k=1,\ldots,n$

$$tr(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{jj}=\sum_{j=1}^{n}(n(j-1)+j)=\sum_{j=1}^{n}((n+1)j-n)=n\cdot\frac{1+n^2}{2}$$

4 / 4

Figura 19.

¿Cuál será la suma de los elementos que están en cada una de las diagonales de los cuadros C1 y C2?

Generalizar al caso Cn: ¿cuál será la suma de los elementos de cada una de las dos diagonales del cuadro formado por los números del 1 a n2

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica: sapereaudethales@gmail.com