# RINCÓN "SAPERE AUDE"… ¿resolviendo problemas?

*Sixto Romero*
*Escuela Técnica Superior de Ingeniería*
*Universidad de Huelva*
*sixto@uhu.es*

## 1. MATEMÁTICAS ENTRE 400 Y 1600 D. C EN LA INDIA

### 1.1. Algunos personajes destacados

Continuamos en esta segunda parte con un periodo importante de las Matemáticas en la India, entre 400 d. C. y 1600 d. C., considerándose como el periodo clásico en la India. Hay que destacar, entre otras, las obras: *Āryabhatīya, Pancasiddhāntikā, Āryabhatīya Bhasya, Mahā, Bhāskariya, Brāhmasput.asiddhānta, Pātīganita, Ganitasārasāngraha, Ganitalaka, Līlāvatī, Bijaganita,* y algunos de los autores:

Figura 1. Aryabhata I. https://www.biografias.es/famosos/aryabhata.html

a) **Aryabhata I** (nacido en 476). Poco se sabe de la vida de Aryabhata, que se llama Aryabhata I para distinguirlo de otro matemático del mismo nombre que vivió cuatro siglos más tarde. Aryabhata desempeñó un papel en el desarrollo del actual sistema de números y contribuyó a la teoría de números en un momento en que gran parte de Europa estaba envuelta en la ignorancia. Nació en la India y tuvo una conexión con la ciudad Kusumapura, la capital de los Guptas durante los siglos IV y V; este lugar se cree que es la ciudad de su nacimiento. Ciertamente, su *Āryabhatīya* fue escrito en Kusumapura, que más tarde se convirtió en un centro de aprendizaje matemático.
b) **Bhāskara I,** era un matemático indio del siglo VII, que probablemente vivió entre c.600- c.680. Probablemente fue el primero en usar un círculo para el cero en el sistema decimal hindú-árabe, y al comentar sobre el trabajo de Aryabhata, evaluó una aproximación racional extraordinaria de la función seno. Hay muy poca información sobre la vida de Bhaskara. Se dice que nació cerca de Saurashtra en

Gujarat y murió en Ashmaka. Fue educado por su padre en astronomía. Se le considera un seguidor de Aryabhata I y uno de los eruditos más reconocidos de la escuela astronómica de Aryabhata. Escribió dos tratados, el Mahabhaskariya y el Laghubhaskariya. También escribió comentarios sobre el trabajo de Aryabhata I titulado Aryabhatiyabhasya. El Mahabhaskariya consta de ocho capítulos que tratan sobre astronomía matemática. El libro trata temas como: las longitudes de los planetas; asociación de los planetas entre sí y también con las estrellas brillantes; la luna creciente; eclipses solares y lunares; y levantamiento y configuración de los planetas. También sugirió una fórmula que tenía un valor asombrosamente preciso del seno

Figura 2. Bhāskara I.
http://taapli.com/bhaskara-i-a-indian-mathematician/

$$sen(x) = \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}$$

que evaluada numéricamente en el ordenador obtenemos para el intervalo cerrado [0, π/2] con paso de π/20

| | | | |
|---|---|---|---|
| x = 0 | fórmula = 0.00000 | sen (x)= 0.00000 | error = 0.00000 |
| x = π/20 | fórmula = 0.15800 | sen (x) = 0.15643 | error = 0.00157 |
| x = π/10 | fórmula = 0.31034 | sen (x) = 0.30903 | error = 0.00131 |
| x = 3π/20 | fórmula = 0.45434 | sen (x) = 0.45399 | error = 0.00035 |
| x = π/5 | fórmula = 0.58716 | sen (x) = 0.58778 | error = -0.00062 |
| x = π/4 | fórmula = 0.70588 | sen (x) = 0.70710 | error = -0.00122 |
| x = π/10 | fórmula = 0.80769 | sen (x) = 0.80903 | error = -0.00134 |
| x = 7π/20 | fórmula = 0.88998 | sen (x) = 0.89103 | error = -0.00105 |
| x = 2π/5 | fórmula = 0.95050 | sen (x) = 0.95105 | error = -0.00055 |
| x = 9π/20 | fórmula = 0.98753 | sen (x)= 0.98769 | error = -0.00016 |
| x = π/2 | fórmula = 1.00000 | sen(x) = 1.00000 | error = 0.00000 |

**c)** **Varahamihira** (505-587). Nuestro conocimiento de Varahamihira es muy limitado. Según una de sus obras, fue educado en Kapitthaka. Sin embargo, lejos de resolver la cuestión, esto solo da lugar a discusiones sobre posibles interpretaciones de dónde estaba este lugar. Dhavale discute este problema. No sabemos si nació en Kapitthaka, donde sea que esté, aunque hemos dado esto como la suposición más probable. Sin embargo, sabemos que trabajó en Ujjain, que había sido un centro importante para las matemáticas desde alrededor del año 400 d.C. La escuela de matemáticas en Ujjain aumentó en importancia debido a que Varahamihira trabajaba allí y continuó durante mucho tiempo siendo uno de los dos

principales centros matemáticos en la India, en particular teniendo a Brahmagupta como su próxima figura principal.
La obra más famosa de Varahamihira es el *Pancasiddhantika* (Los cinco cánones astronómicos) de 575 d. C. Este trabajo es importante en sí mismo y también en darnos información sobre textos indios más antiguos que ahora están perdidos. El trabajo es un tratado sobre astronomía matemática y resume cinco tratados astronómicos anteriores, a saber, los siddhantas Surya, Romaka, Paulisa, Vasistha y Paitamaha.
Shukla afirma:

> *"…El Pancasiddhantika de Varahamihira es una de las fuentes más importantes para la historia de la astronomía hindú antes de la época de Aryabhata I …".*

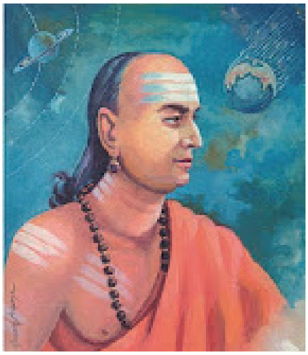


Figura3. Varahamihira. http://meteobasica.blogspot.com/2012/05/biografia-de-varahamihira-505-587-dc.html

Varahamihira hizo algunos descubrimientos matemáticos importantes. Entre estos se encuentran ciertas fórmulas trigonométricas que traducidas a nuestra notación actual corresponden a

$$sen\, x = cos\, (\pi / 2 - x),$$
$$sen^2 x + cos^2 x = 1,\ y$$
$$(1 - cos\, 2x) / 2 = sen^2 x.$$

Otra contribución importante a la trigonometría fueron sus tablas sinusoidales donde mejoró las de Aryabhata I dando valores más precisos. Debe enfatizarse que la precisión era muy importante para estos matemáticos indios, ya que estaban calculando tablas sinusoidales para aplicaciones a la astronomía y la astrología. Esto motivó gran parte de la precisión mejorada que lograron al desarrollar nuevos métodos de interpolación.

**d)** **Brahmagupta** (598-665), cuyo padre era Jisnugupta, escribió importantes trabajos sobre matemáticas y astronomía. En particular, escribió *Brāhmasput. asiddhānta* en 628. El trabajo fue escrito en 25 capítulos y Brahmagupta nos dice en el texto que lo escribió en Bhillamala, que hoy es la ciudad de Bhinmal. Esta fue la capital de las tierras gobernadas por la dinastía Gurjara.
Brahmagupta se convirtió en el jefe del observatorio astronómico en Ujjain, que era el principal centro matemático de la antigua India en este momento. Matemáticos sobresalientes como Varahamihira habían trabajado allí y construyeron una fuerte escuela de astronomía matemática.
La comprensión de Brahmagupta de los sistemas numéricos representó un progreso significativo más allá de sus contemporáneos. El concepto de cero, ajeno a los matemáticos indios, Brahmagupta lo definió como la diferencia de un número consigo mismo. Luego derivó sus propiedades básicas; sabía que el cero era una

identidad aditiva, por ejemplo, pero tenía dificultades para definir la división por cero, sin darse cuenta de que esta operación es imposible. Los números negativos se introducen al restar una (cantidad positiva) de cero, y se describen como "deudas". Brahmagupta, después demuestra la aritmética de los números positivos y negativos, y muestra, por ejemplo, que un negativo multiplicado por un positivo es un negativo.

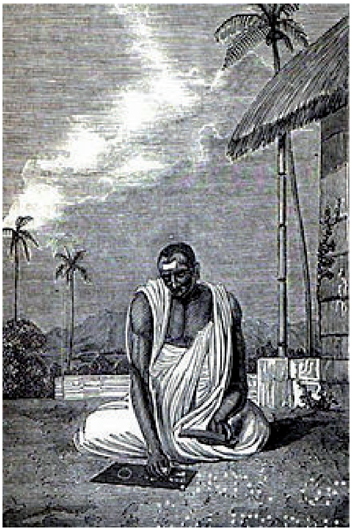


Figura 4. Brahmagupta. https://es.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta

También analiza la multiplicación extendida de números grandes, utilizando un sistema numérico de valor de posición bastante similar al método moderno. De hecho, el sistema numérico actual se deriva, con algunas modificaciones, de los matemáticos indios. Brahmagupta presenta un procedimiento para calcular raíces cuadradas que es en realidad equivalente al método iterativo de Newton-Raphson. Para resolver ciertas ecuaciones cuadráticas, Brahmagupta introdujo una notación algebraica simbólica y probablemente usó el método de fracciones continuas. Algunos otros temas del *Brahmasphutasiddhanta* incluyen reglas para sumar series –como la suma de números enteros, cuadrados y cubos consecutivos– y fórmulas para áreas de cuadriláteros.

Son interesantes las reglas aritméticas siguientes en términos de fortunas (números positivos) y deudas (números negativos):

1. Una deuda menos cero es una deuda.
2. Una fortuna menos cero es una fortuna.
3. Cero menos cero es un cero.
4. Una deuda restada de cero es una fortuna.
5. Una fortuna restada de cero es una deuda.
6. El producto de cero multiplicado por una deuda o fortuna es cero.
7. El producto de cero multiplicado por cero es cero.
8. El producto o cociente de dos fortunas es una fortuna.
9. El producto o cociente de dos deudas es una fortuna.
10. El producto o cociente de una deuda y una fortuna es una deuda.
11. El producto o cociente de una fortuna y una deuda es una deuda.
12. Brahmagupta luego trató de extender la aritmética para incluir la división por cero:
13. Los números positivos o negativos cuando se divide por cero es una fracción del cero como denominador.
14. El cero dividido por números negativos o positivos es cero o se expresa como una fracción con cero como numerador y la cantidad finita como denominador.
15. Cero dividido por cero es cero.


*Épsilon, 2019, nº 102, 107-121, ISSN: 2340-714X*

Realmente Brahmagupta dice muy poco cuando sugiere que n dividido por cero es **n/0**. Ciertamente se equivoca cuando afirma que cero dividido por cero es cero. Sin embargo, es un intento brillante de extender la aritmética a números negativos y cero.

También son dignos de mención: Mahāvīracarya (nacido alrededor de 850), Āryabhata II (950-1100), Śrįdhara (nacido en 991), Bhāskarācārya (Bhāskara II, nacido en 1114).

## 1.2. Sistematización en el estudio de algunas ecuaciones

Según el método hindú, todo, incluidas las matemáticas, se expresa utilizando la poesía como elemento de "divulgación". Los números, con frecuencia, fueron reemplazados por palabras de la mitología india.

El primer tratamiento sistemático de la ecuación de primer grado

$$ax + c = by$$

(*Kuṭṭaka*) se encuentra en el tratado *Āryabhatīya* del astrónomo indio Āryabhaṭa aproximadamente 510 después d.C. De los 33 versos muy concisos de la parte matemática (*Ganiṭa*) dos se refieren a esta cuestión cuyo tratado se perdió, posteriormente la solución fue esbozada posteriormente por Brahmagupta, y Bhāskara dará los detalles claramente. Āryabhat sabía cómo extraer raíces cuadradas que las utiliza en sus estudios de progresiones aritméticas y determina el número de esferas en un empilamiento tetraédrico, también da reglas para calcular valores sinusoidales.

Varāhamihira, astrónomo de la escuela de Ujjain (en el centro de la India) escribe *Panca Siddhāntika*, que contiene un resumen de la trigonometría hindú. Sus tablas, de senos, podría provenir de Ptolemeo. Mucho antes de Copérnico, sabía que la tierra gira alrededor del sol. El tratado de astronomía *(Brhatsamhitā*) de Varāhamihira incluye una descripción científica de las elipses, incluso se ve obligado a justificar los mitos de la ortodoxia de los Brahmanes. Sucede igual para el *Brahma-Siddhānta* de Brahmagupta.

El *método cíclico* (*Cakravala*) para resolver la ecuación

$$x^2 - Py^2 = \pm 1$$

se remonta a los trabajos de matemáticos y astrónomos de la escuela india entre los siglos VI y XII, era conocida por Jayadeva en el siglo XI, y Brahmagupta sabía que había un número infinito de soluciones. La estructura multiplicativa del conjunto de soluciones le era familiar, y a partir de una solución sabía construir una infinidad.

La identidad de Brahmagupta es

$$(x^2 - Py^2)(z^2 - Pt^2) = (xz \pm Pyt)^2 - P(xt \pm yz)^2$$

y su método para obtener dos soluciones es *bhavana* en sanscrito.

**Ejemplo:** El método cíclico conduce siempre a una solución. Un ejemplo espectacular (obtenido de Weil, A. *Number Theory. An approach through history.* From Hammurapi to Legendre. BirkhÄauser Boston, Inc., Boston, Mass., 1984) lo podemos encontrar en la ecuación

$$x^2 - 61y^2 = 1$$

Brahmmagupta conocía también:

**a)** La parametrización de la ecuación de Pitágoras por

$$x = 2mn,\ y = m^2 - n^2,\ z = m^2 + n^2$$

**b)** Sabía resolver las ecuaciones de la forma

$$axy = bx + cy + d$$

**c)** El problema que consiste en encontrar $x$ e $y$ tales que $ax+1$ $y$ $bx+1$ sean sendos cuadrados.
Da la solución,

$$x = \frac{8(a+b)}{(a-b)^2},\ ax+1 = \left(\frac{3a+b}{a-b}\right)^2,\ \mathrm{bx}+1 = \left(\frac{a+3b}{a-b}\right)^2$$

Igualmente, muestra cómo elegir $x$ e $y$ para que los números $x+y$, $x-y$, $xy-1$ sean cuadrados.

Finalizo esta entrega, indicando que como en otras civilizaciones matemáticas antiguas, la determinación del número π jugó un papel importante.

En la fórmula

$$s = d\left(1 - \frac{28}{(8)x(29)}\left(1+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{8}\right)\right)\right)$$

Baudhāyana, para el lado s de un cuadrado dónde el área es la de un disco de diámetro ***d***, da para π el valor aproximado de 3,088.

## SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

### 1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 101)

Para Platón los entes geométricos ideales eran la recta y la circunferencia: toda la geometría habría que limitarla a las construcciones con regla y compás. Esta era la forma correcta de resolver los problemas geométricos, y cualquier otra forma era vulgar y degradante, y no merecía ni ser contemplada.

Fuertemente influenciado por Platón los griegos se dispusieron a construir la geometría con regla y compás, y la verdad es que no les fue tan mal porque hicieron una labor encomiable. Pero en su camino se tropezaron con tres problemas que fueron incapaces de resolver y que fueron tomando importancia con el paso del tiempo hasta ser llamados: "*Los Tres Problemas Clásicos de la antigüedad*". Estos problemas son:

a) ***La duplicación del cubo***: construir un cubo cuyo volumen sea doble que el de un cubo de lado dado.
b) ***La trisección del ángulo***: dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales.
c) ***La cuadratura del círculo***: dado un círculo, encontrar el lado de un cuadrado cuya área sea la misma que la del círculo inicial.

Figura 5. Tres problemas clásicos. http://masquemates.blogspot.com/2007/11/los-tres-problemas-clsicos.html

Los tres problemas tienen en común que son en apariencia sencillos, tienen un enunciado que anima a intentarlos, pero ninguno de los tres tiene solución utilizando solo la regla y el compás, como después siglos más tarde se demostraría.

La necesidad de estudiar los elementos constitutivos de las referencias espaciales ha dado lugar, en las últimas décadas, en cuánto a la enseñanza de la geometría se refiere, a trabajos didácticos inspirados en diferentes teorías, pero a menudo de una preocupación común de análisis.

Así, trabajos recientes han estudiado la introducción de una dimensión cognitiva (Houdement & Kuzniak, Parzysz, Jore ...), surgen preguntas tales como la articulación entre espacios de trabajo, en la constitución de la geometría, la entrada perceptiva o la cuestión de la visualización; entrada experimental, …; finalmente, la cuestión de la inferencia y el lenguaje, luego de la prueba (ver Houdement y Kuzniak, en este mismo trabajo). Los trabajos de Perrin et al. (Offer, Perrin & Verbaere, 2006, Keskessa, Perrin & Delplace, 2007, Perrin & Godin, 2009) se centran en el estudio del uso de instrumentos y el paso del razonamiento de la geometría instrumentada, mientras que no prohíben hacer proposiciones de situaciones para favorecer esta transición . En 1992, Berthelot y Salin definieron y experimentaron situaciones que organizaban la transición de la experimentación a la geometría, en un proceso que llamaron un enfoque de modelado porque la transición de la experimentación a la teorización fue el principio. De acuerdo con la naturaleza del problema de geometría propuesto, se refirieron a tres problemas (Berthelot y Salin, 1992):

- ***Un problema práctico*** en el que los objetos sobre los que se trabaja son objetos físicos (en particular dibujos): la validación es hecho mientras permanece en el espacio sensible.
- ***Un problema geométrico*** en el que los objetos ya no son objetos físicos: la validación se realiza mediante un razonamiento que se basa únicamente en el conocimiento geométrico reconocido.

- ***Un problema de modelización*** en el que trabajamos con objetos físicos: la validación se realiza en el espacio sensible, como en el problema práctico, pero el enfoque de la resolución es totalmente diferente ya que se basa en propiedades geométricas.

Estos tres problemas están asociados con situaciones organizadas en espacios de diferente tamaño (dimensiones espaciales): ***microespacio, mesoespacio, macroespacio*** (véase Berthelot y Salin, 1992, Brousseau, 2000). Inspirados por estos enfoques, Pressiat y Combier (2003) establecieron situaciones para garantizar la transición de la experimentación en el meso-espacio con la geometría escolar. (Bloch I., Conne F. et al. *(eds.), L'enseignement de la geometrie, de l'ecole au debut du college: situations et connaissances. Actes de la XIVème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, pp. 1 – 24. ,2008)*

## Propuesta 1: dos joyitas geométricas

**JOYITA: a)** *Sea M un punto del lado BC de un triángulo ABC. La paralela por M a AB corta al lado AC en el punto N y la paralela por M a AC corta al lado AB en el punto O. La razón entre las áreas de los triángulos OBM y NMC es k. Determínese la razón entre las áreas de los triángulos AON y ABC.*

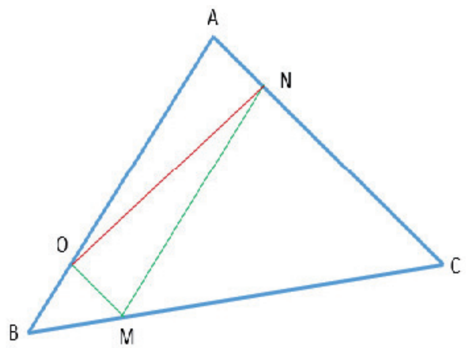
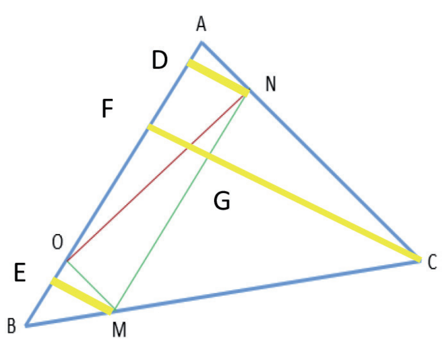



Figura 6. Triángulo cualquiera.

## SOLUCIÓN

### *Paso 1*

Consideremos el triángulo cualquiera, de la figura adjunta



Tracemos la perpendicular por $N$, por $M$ y por $C$ al lado $BA$, cortando en $D$, $E$, *y* $F$ respectivamente

Los triángulos $OBM$ y $NMC$ son semejantes, de razón $k$. El cuadrilátero $AOMN$ es un paralelogramo, y $MN=OA$.

Si a $BO$ lo designamos por t, se tiene que

$$MN=OA=k.t.$$

Como

$$BA=BO+OA \Rightarrow BA=t+kt=(1+k)t$$

El $Área(OBM)=W=(OB.EM)/2$

### *Paso 2*

Por otro lado, $CG = k.\ EM \Rightarrow CG=k.\ h$ siendo $h=EM$ la altura del triángulo $OBM$.

$$CF=CG+GF=CG+EM \ \square\ CF=(1+k)hh.$$

Y el área del triángulo $ABC$ es:

$$Área\ (ABC)=(1+k^2).\ W$$
$$DN=GF=EM=h$$

### *Paso 3*

$$Área\ (AON)=(AO/2).GF=(k.\ t.\ h)\ /\ 2=k.\ W$$
$$Área(OBM)/Área(ABC)=k.\ W\ /\ (1+k)^2.\ W=k\ /\ (1+k)^2$$

**JOYITA: b)** *Dos circunferencias secantes* $C_1$ y $C_2$ *de radios* $R_1$ y $R_2$ *se cortan en los puntos* $A$ y $B$.

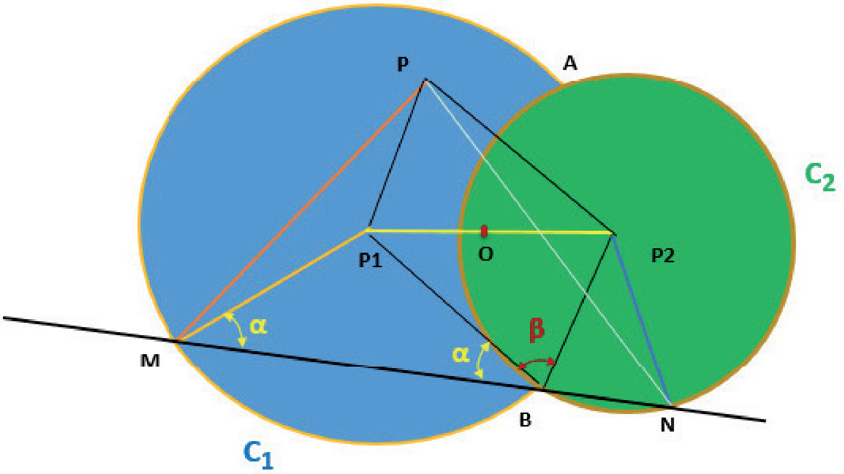
*Por B se traza una recta variable que corta de nuevo a* $C_1$ *y* $C_2$ *en dos puntos que llamaremos M y N respectivamente. Comprobar que existe un punto P, que depende sólo de* $C_1$ *y* $C_2$*, tal que la mediatriz del segmento MN pasa por P.*

*NOTA: Problema Olimpiada Nacional. Solución de L. Emilio García (UPV).*

## SOLUCIÓN

### *Paso 1*

La figura adjunta muestra las dos circunferencias secantes $C_1$ y $C_2$.




Consideremos el punto $O$, como punto medio del segmento $P_1P_2$. Todas las matrices de los segmentos $MN$ pasan por el punto simétrico de $B$ respecto de $O$.

Consideremos los ángulos

$$\alpha = <MBP_1 = <P_1MB,\ \beta = <P_1BP_2$$

sigue pues que $P_2BN = 180^o - (\alpha + \beta)$.

Como el triángulo $P_2BN$ es isósceles, se tiene

$$<BP_2N = 180^o - 2<P_2BN = -180^o + 2(\alpha + \beta), \text{ y así}$$
$$<PP_2N = 180^o - \beta + <BP_2N = 180^o - \beta - 180^0 + 2(\alpha + \beta) = 2\alpha + \beta$$

De modo análogo, por ser el triángulo $MP_1B$ isósceles, se tiene:

$$< MP_1B = 180^o - 2\alpha$$

y

$$<MP_1B = 360^o - (<MP_1B + 180^o - \beta) = 360^o - 180^o + 2\alpha - 180^o + \beta = 2\alpha + \gamma$$

Resulta que para cualquier posición de la recta variable los triángulos $PP_1M$ y $PP_2N$ son iguales y por tanto $PM= PN$ y $P$ está en la mediatriz de $MN$.

Como $P$ no depende de la recta variable queda probada la propiedad del enunciado.

## SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

### 1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la propuesta de los ejercicios del número anterior 101)

La naturaleza formal y cognitiva que puede ofrecer la teoría de números para la Educación Matemática (EM), su relación con la aritmética y el álgebra, su accesibilidad, su utilidad y otras cuestiones hay que entenderlas como una interrelación bajo la óptica de la promoción y el diálogo, con sentido de crítica constructiva, de las investigaciones que ofrece la comunidad internacional de Educación Matemática (EM), presentando su relevancia e importancia en este campo en alumnos de secundaria y la formación de maestros, sobre todo.

La lectura de la obra de Rina Zakis y Stephen R. Campbell, *Number Theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects (Studies in Mathematical Thinking and Learning)* que, entre otros, incluye los temas:

**a)** Comprensión de conceptos particulares relacionados con la estructura numérica y la teoría de números.
**b)** La elaboración de la relevancia histórica y psicológica de la teoría de números en el desarrollo de conceptos.
**c)** El logro de una transición y extensión sin problemas desde el reconocimiento de patrones hasta los principios formativos.
**d)** La consecución del entendimiento de la estética de la estructura numérica.
**e)** La investigación de conexiones entre técnica y teoría.
**f)** La utilización de ordenadores y calculadoras como herramientas pedagógicas.
**g)** …Y el papel que podrían desempeñar los conceptos de la teoría de números en el desarrollo del conocimiento matemático y el razonamiento en estudiantes y maestros.

Nos debe llevar a la consideración de destacar que esta temática relacionada con la teoría de números debería utilizarse como un trampolín desde la aritmética hacia la generalización y el formalismo algebraico, y como un medio para proporcionar significados intuitivos de números, variables, funciones y pruebas.

### Propuesta 2: dos joyitas numéricas

**JOYITA:** *a) Hallar todos los enteros positivos p y q tales que*

$$p! + 1 = (q! - 1)^2$$

## SOLUCIÓN

### Paso 1

Consideremos que $p$ y $q$ son enteros positivos, de la expresión

$$p! + 1 = (q! - 1)^2,$$

sigue que $q \geq 3$.

Por lo tanto,

$$p! + 1 = (q!)^2 - 2q! + 1, \text{ o sea } p! = (q!)^2 - 2q!$$
$$p! = q!\,(q! - 2).$$

Al ser obviamente $p > q$, si se divide por $q!$ ambos miembros se tiene que

$$\frac{p!}{q!} = q! - 2,$$
$$\frac{p(p-1)(p-2).....(p-(p-q-1).q(q-1)....1}{q(q-1)(q-2)...1} = q! - 2$$
$$\frac{p(p-1)(p-2)...(q+1)q!}{q!} = q! - 2$$
$$p(p-1)(p-2)...(q+1) = q! - 2$$

tenemos que $p(p - 1)\,(p - 2)...\,(q + 1) = q! - 2$ y al ser $q!$ divisible por 3 ($q \geq 3$), tenemos que $q! - 2$ no es divisible por 3, por lo que el término de la izquierda, $p(p - 1)...\,(q + 1)$, debe tener a lo sumo dos factores.

### Paso 2

### 2.1. Primer Caso

**a)** Sea $p = q + 1$ Þ $q + 1 = q! - 2$ Þ $q = q! - 3$. Como $q$ divide a $q! - 3$ y divide a $q!$ podemos inferir que $q$ divide a 3 Þ $q = 3$ y $p = 4$.

**b)** Podemos comprobar que para estos dos valores se cumple que

$$(4!+1) = (3! - 1)^2. \text{ En efecto: } (24+1) = (6-1)^2,\ 25 = 25.$$

### 2.2. Segundo Caso

**a)** Sea $p = q + 2 \Rightarrow (q + 2)\,(q + 1) = q! - 2 \Rightarrow q^2 + 3q + 2 = q! - 2 \Rightarrow q^2 + 3q + 4 = q!$

Por lo tanto: $3q = q! - q^2 - 4$ con lo que $q$ divide a $q! - q^2 - 4 \Rightarrow$ q divide a 4 y, por tanto, $q = 4$.

**b)** Concluimos que $q = 4$ no es solución de $q^2 + 3q + 4 = 4!$ pues $16 + 12 + 4 \neq 24$. La única solución es, por ello

$$q=3,\ p=4$$

**JOYITA: b)** *Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de un cuadrado 3x3. A continuación sumamos seis números de tres cifras, tres que se leen en filas de izquierda a derecha y otros tres que se leen en columnas de arriba abajo.*

*¿Podremos encontrar alguna distribución para la que se obtenga como valor de la suma 2019?*

## SOLUCIÓN

### *Paso 1*

Sea la distribución siguiente en el cuadrado

| | | |
|---|---|---|
| p | q | r |
| s | t | u |
| v | x | z |

Atendiendo a las condiciones del ejercicio, se tiene que la suma es:

$$S = pqr + stu + vxz + psv + qtx + ruz$$

$S = 100\,(p + s + v + p + q + r) + 10(q + t + x + s + t + u) + (v + u + z + y + x + z) =$

$S = 100\,(2p + s + v + q + r) + 10(q + 2t + x + s + u) + (r + u + 2z + \mathrm{y} + \mathrm{x})$

$S = 200p + 100s + 100v + 100q + 100r + 10q + 20t + 10x + 10s + 10u + v + u + 2z + y + x$

$S = 200\boldsymbol{p} + 110s + 101v + 110q + 101r + 20t + 11x + 11u + 2z$

### *Paso 2*

Para las distintas distribuciones que podamos realizar, interviniendo los números del 1 al 9, en módulo 9 se tiene:

$$200:9 = 22.9 + 2$$
$$110:9 = 12.9 + 2$$
$$101:9 = 11.9 + 2$$

$$20{:}9 = 2.9 + 2$$
$$11{:}9 = 1.9 + 2$$

Por ello,

$$S = 2(p + s + v + q + t + x + r + u + z) = 2.\ (1{+}2{+}3{+}4{+}5{+}6{+}7{+}8{+}9) = 2.45 = 90$$

que en módulo 9 es S=0.

Por lo tanto, como 2019 no es múltiplo de 9, no habrá ninguna distribución para la que la suma indicada tome el valor 2019 podremos afirmar que la suma S no puede valer nunca 2019.

## SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

Siguiendo el mismo esquema que en artículo anteriores, en esta ocasión, presentará varios ejercicios relativos a la teoría de números y la geometría del triángulo.

### Propuesta 1: dos joyitas geométricas

El círculo en el que aparecieron los estudios matemáticos a principios del siglo XIX se rompió por todos lados. Se nos presentan viejos problemas de forma renovada, surgen nuevos problemas, cuyo estudio ocupa legiones de trabajadores. El número de quienes cultivan geometría pura se ha vuelto prodigiosamente pequeño. Este es un peligro contra el cual es importante protegerse. No olvidemos que, si el Análisis ha adquirido los medios de investigación de los que carecía en el pasado, se los debe en gran medida a las concepciones introducidas por los Agrimensores. No es necesario que la Geometría permanezca de alguna manera enterrada en su triunfo. Fue en su escuela donde aprendimos, que nuestros sucesores tendrían que aprender, nunca confiar ciegamente en métodos demasiado generales, considerar las preguntas por sí mismos y encontrar, en las condiciones particulares de cada problema, un camino directo hacia una solución fácil, los medios para aplicar de manera apropiada los procesos generales que toda la ciencia debe unir. Como dice Chasles en el Resumen histórico: *"...Las doctrinas de la geometría pura a menudo ofrecen, y en una gran cantidad de preguntas, esta forma simple y natural que, al penetrar en el origen de las verdades, expone La cadena misteriosa que las une y las hace conocer individualmente de la manera más luminosa y completa..."*

¡Cultivemos la geometría, que tiene sus propias ventajas, …!

- **a)** *¿Existe algún triángulo tal que las medidas de sus lados son tres números consecutivos y el ángulo mayor es el doble que el menor? En caso afirmativo, calcular las medidas.*
- **b)** *Sea M un punto interior del segmento AB. Se construyen cuadrados AMCD y BEHM en el mismo lado de AB. Si N es el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas a dichos cuadrados probar que:*

1. *Los puntos B,N y C están alineados.*
2. *El punto H es el ortocentro del triángulo ABC.*

## Propuesta 2: dos joyitas numéricas

Prácticamente desde nuestra más tierna infancia, las Matemáticas nos circundan formando parte de nuestras vidas. Modelizamos con algoritmos matemáticos, casi todo.

Empezamos con los números naturales que con "cierta simpleza", los utilizamos a diario para contar objetos, realizar diferentes operaciones elementales cuando vamos al mercado, al cine, al teatro, al kiosco, …en definitiva cuándo compramos alguna cosa, manejamos nuestra economía, así como todo aquello que necesitamos para vivir. Posteriormente aparece el uso de los números negativo, fraccionarios, reales, y complejos.

Llega a ser un uso casi automático, con aplicaciones en formas complejas variando acorde a distintas disciplinas o tecnologías.

Presentaré en esta ocasión, y ulteriormente en siguientes números, algunos ejercicios que aparecen en la Olimpiada Matemática Nacional en nuestro país.

El por qué presentar en la sección SAPERE AUDE problemas de olimpiadas matemáticas hay que encontrarlo en el convencimiento de que la participación de muchos jóvenes estudiantes en todo el mundo, han alcanzado una importante resonancia internacional desde hace décadas. Se trata de una propuesta intelectual que permite al alumno/a enfrentarse a una situación problemática simple o no, muchas veces difícil, resoluble con sentido común y un poco de la matemática escolar y/o elemental. No se trata de un ejercicio más o menos evidente como los que abundan al final de un capítulo en un libro de texto, tampoco es una situación abstracta de resultados teóricos prefijados, ni problemas con enunciados con trampas para confundir al estudiante con talento.

La realización de estas actividades, como nuestra Olimpiada Thales, permite que los responsables académicos de muchos países mantengan su currícula escolar convenientemente actualizado para satisfacer a las exigencias del mundo moderno.

Soy consciente de la marcada diferencia entre la matemática escolar y la olímpica. Esta última apunta al ingenio, la creatividad, la invención, el desarrollo de la intuición para responder de manera efectiva a las aspiraciones de la joven generación.

¡Es, bajo esta idea precisamente, lo que me induce a presentar en esta sección dos joyitas numéricas, a mi juicio muy interesantes, que estoy seguro gustará al lector!

**a)** *Hallar las tres últimas cifras del número* $3^{2019}$.

**b)** *¿Cuál de los dos números es mayor:* $888!$ *ó* $300^{599}$?

**NOTA:** Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
**sapereaudethales@gmail.com**