

Aprendiendo a subitizar cantidades con el *rekenrek* en un sistema online para el aprendizaje de las matemáticas

Carlos de Castro Hernández
carlos.decastro@uam.es
Universidad Autónoma de Madrid

Resumen: *Propuesta de actividades desarrollada con Smartick, sistema para el aprendizaje de las matemáticas online, dirigidas al uso de configuraciones numéricas y al aprendizaje de la subitización conceptual con el rekenrek. Esta propuesta, para alumnos de 4 a 7 años, constituye una iniciación a la aritmética y a la resolución de problemas verbales con un modelo visual que complementa al conteo en la iniciación en el aprendizaje numérico.*

Palabras clave: *Aritmética, conteo, educación infantil, resolución de problemas, sistemas de aprendizaje online, subitización, visualización.*

Learning to subitize quantities with the *rekenrek* in an online mathematics learning system

Abstract: *Proposal of activities developed with Smartick, an online system for the learning of mathematics, aiming at the use of number arrays and the learning of conceptual subitizing with the rekenrek. This proposal, for students from 4 to 7 years, is an introduction to arithmetic and solving word problems with a visual model that complements the use of counting in the initial learning of numbers.*

Keywords: *Arithmetic, counting, early childhood, problem solving, online learning systems, subitization, visualization.*

INTRODUCCIÓN

En este artículo presento una serie de actividades *online* para el uso de configuraciones numéricas, el aprendizaje de la subitización, y el uso de un ábaco especial holandés, el *rekenrek*, como modelo manipulativo y visual para la iniciación al cálculo. Un concepto clave para comprender la propuesta es el de subitización. La subitización consiste en reconocer de forma súbita (repentina, inmediata, instantánea), de un golpe de vista, e indicar el número de objetos que hay en una colección. La subitización es un procedimiento de cuantificación diferente y complementario al conteo. Hay dos tipos distintos de subitización: si reconocemos uno, dos o tres objetos (Fischer, 1992), de un vistazo, debido a que son muy pocos y esto nos permite controlar el número sin contar, hablamos de *subitización perceptiva*; si reconocemos un número mayor de objetos, gracias a su disposición espacial, por formar una figura reconocible, estamos ante el caso de una *subitización conceptual* (Clements, 1999). La peculiaridad de la propuesta que presento reside en que, pese a la importancia capital de la subitización conceptual en la iniciación al cálculo, tratamos con un contenido “invisible” en el currículo, que no aparece en el mismo, lo cual incide negativamente en su enseñanza.

Las actividades que configuran esta propuesta de “ideas para el aula” han sido diseñadas para *Smartick*, método programado *online* para el aprendizaje de las matemáticas, para estudiantes de 4 a 14 años (<http://www.smartick.es/>). *Smartick* se utiliza en sesiones diarias de 15 minutos. Partiendo de un cuestionario inicial, para cada nuevo alumno se genera un plan de estudios personalizado que se adapta en tiempo real según las respuestas que va dando el alumno a las tareas planteadas. El sistema cuenta, además de las actividades (que se van corrigiendo de forma inmediata), con problemas resueltos y tutoriales. También hay en el sistema un entorno para el tutor del alumno (padre, madre, profesor, etc.) en que se suministra información sobre la evolución del alumno. El tutor recibe además informes tras cada sesión por correo electrónico.

Todas las actividades que muestro en este artículo están disponibles en la sección de “Recursos didácticos” de *Smartick* (<http://www.smartick.es/matematicas/recursos-didacticos.html>), que cuenta con más de 300 actividades del sistema en abierto, que pueden ser utilizadas como recursos en el aula. Además, las actividades pueden ser realizadas fuera de cualquier entorno tecnológico, de forma manipulativa, con un *rekenrek* elaborado de forma casera.

INICIACIÓN EN EL USO DE CONFIGURACIONES

El primer tipo de configuración numérica que utilizan los pequeños desde su primer año de vida es el formado por los dedos de sus propias manos. Es algo muy habitual que, en el entorno familiar, cuando el bebé va a cumplir su primer año de vida, los padres o abuelos le enseñen a mostrar su edad levantando un dedo como respuesta automatizada a la pregunta: ¿Cuántos años tienes? Mostrar cantidades con las manos tiene una función en el aprendizaje numérico: refuerza la idea de cardinalidad; esto es, que la palabra “tres” representa globalmente a los tres dedos levantados. Autores como Brissiaud (1992, 1993) han elaborado propuestas de trabajo para niños de educación infantil en las que se hace un uso sistematizado de los dedos de las manos para representar números.



Figura 1. Actividades de iniciación en el uso de configuraciones.

Con posterioridad al uso de los dedos, aparecen las configuraciones de los dados, dentro de juegos tradicionales de tablero como el parchís o la oca. Este tipo de juegos de conteo empieza a ser muy importante de los 4 a los 6 años, edades entre las que aumenta más su uso (Secadas, 2004). También de 4 a 6 años comienzan a utilizarse juegos de cartas para el aprendizaje de las matemáticas (Kamii, 1995). Dedos, dados, y cartas, proporcionan una aproximación visual, a través de sus configuraciones características, al aprendizaje del número, que complementa al conteo. Mientras en el conteo se trata a las colecciones de objetos como agregados de unidades, a través de la correspondencia uno a uno entre objetos y numerales, cuando usamos configuraciones nos acercamos a la cantidad de objetos de forma global: el cuatro se asocia a la figura que forman los vértices del cuadrado. En el conteo predomina el procedimiento, ligado a los principios subyacentes en el mismo; en la configuración, los procesos de visualización.

En la Figura 1, observamos tres tipos de actividades de Smartick con configuraciones. Al principio, esperamos que la asociación entre las diferentes representaciones numéricas se realice a través del conteo. Poco a poco, con la práctica y el uso continuado, cada configuración se va interiorizando. Se forma la imagen mental que se asocia a un número concreto. La imagen de una mano extendida y otra junto a ella con un dedo levantado, o la imagen de dos filas paralelas con tres objetos en cada una, evocan para nosotros inmediatamente el número seis, cuando hemos tenido experiencia suficiente con estas configuraciones. Además, en la Figura 1 vemos dos formas diferentes de poner el dos con los dedos, o se presentan los dados con distintas orientaciones, con el fin de que el niño no asocie de forma rígida un número con una configuración de dedos o una orientación determinada.

EL REKENREK: UN MODELO VISUAL PARA LA INICIACIÓN AL CÁLCULO

Usar dados y cartas tiene un innegable interés, pero también un inconveniente. Aunque algunas configuraciones sugieren relaciones aritméticas como, por ejemplo, el 6 del dado sugiere las descomposiciones $6 = 3 + 3$ o $6 = 2 + 2 + 2$, dados y cartas no permiten desarrollar un enfoque visual sistematizado para la suma y la resta. En efecto, si juntamos dos dados con un dos y un tres en cada uno de ellos, no percibimos la configuración correspondiente al cinco. Aquí es donde intervienen materiales didácticos formados por configuraciones, tan antiguos como las tablas con patrones de Stern (Stern y Stern,

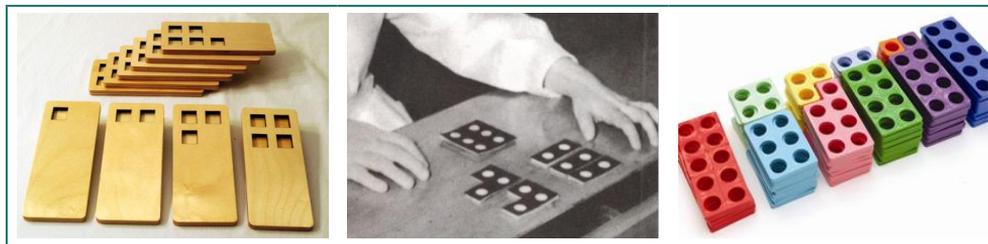


Figura 2. Las tablillas de Stern, placas de H. Lebert, y el Numicon.



Figura 3. Primeras actividades con el rekenrek.

1949), o las placas de Herbinière-Lebert (Mialaret, 1955/1967) (Figura 2), en que en lugar de las configuraciones propias de los dados se utiliza una disposición de dos en dos, denominada por Stern y Stern “patrones estructurales aritméticos”. Una versión actual inspirada en estos dos materiales son las configuraciones utilizadas en el Numicon (Figura 2, derecha). En todos estos materiales, si juntamos la configuración del 7 y la del 3, por ejemplo, vemos la configuración del 10 (ver las formas rosa y amarilla del Numicon).

En *Smartick* se utiliza el *rekenrek* como modelo visual para el aprendizaje de la aritmética. El *rekenrek* es un ábaco desarrollado por Adrian Treffers, investigador del Instituto Freudenthal de Holanda (Blanke, 2008). *Rekenrek* significa “rejilla de cálculo” (en inglés, recibe el nombre de arithmetic rack, number rack o mathrack). Al igual que en el caso de las Regletas con tapa (Brissiaud, 1993), es un material que copia las configuraciones de las manos. Como vemos en la Figura 3, en el centro, igual que el 7 se muestra con las manos con una mano y dos dedos de la otra, en el *rekenrek* representamos el 7 con cinco cuentas rojas (que corresponden con 5 dedos de una mano) y dos cuentas blancas (dos dedos de la otra). Esta asociación del material con las manos persigue dos objetivos: en primer lugar, hacer un aprendizaje significativo basado en el conocimiento que tenemos de las manos para representar cantidades; en segundo lugar, ir poco a poco prescindiendo del uso de los dedos, que se sustituyen por el *rekenrek*.

En la Figura 3, observamos distintos tipos de actividad que se realizan con un *rekenrek* virtual. En ellas utilizamos el *rekenrek* para indicar cuántos hay y se hace explícita la relación de este material con las manos para mostrar cantidades. También incluyo un ejemplo de cómo el sistema proporciona una retroalimentación inmediata cuando se comete un error.



Figura 4. Las actividades con limitación en el tiempo de exposición.

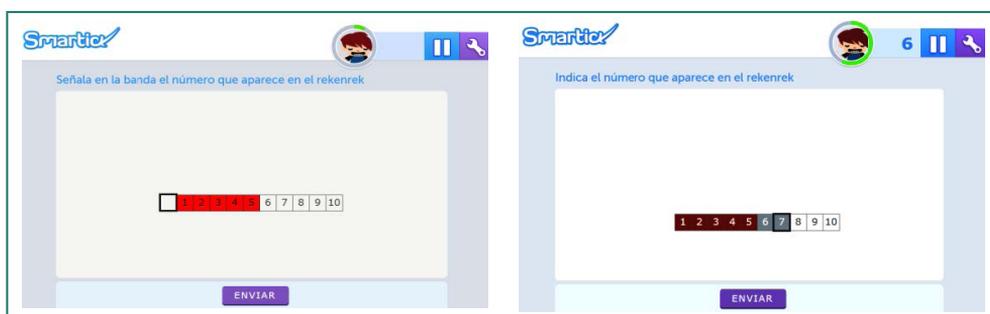


Figura 5. La banda numérica adaptada al rekenrek.

DEL CONTEO A LA SUBITIZACIÓN

Cuando trabajamos con configuraciones, pasado un tiempo, llegamos a asociar la configuración con la cantidad, sin necesidad de contar. Esto es lo que ocurre cuando los niños, después de contar repetidas veces los cinco puntos en la cara del dado, reconocen la figura característica formada por los cuatro vértices del cuadrado con el punto en medio y saben ya que han obtenido el 5. En Smartick, después de muchas actividades en que se permite el conteo, pasamos a un nuevo bloque de actividades en que las se limita el tiempo de exposición de las cantidades a dos segundos. En la Figura 4, vemos un icono morado que debemos clicar para iniciar la actividad. A continuación, aparece una imagen del *rekenrek*, que desaparece a los dos segundos (Figura 4, derecha). En la parte de debajo de la actividad, disponemos de una banda numérica en la que debemos dar la respuesta. Como se aprecia en la Figura 5, pasados los dos segundos de exposición, la imagen con el 7 en el *rekenrek* desaparece. A los niños no les da tiempo a contar, de modo que la única forma de acertar es a través de la subitización conceptual.

Como podemos ver en la Figura 5, la banda numérica que utilizamos en estas actividades está adaptada al *rekenrek*, de modo que permite representar una cantidad (digamos el 7) de tres formas distintas: a) reconociendo el numeral “7”; b) contando 7 casillas, c)

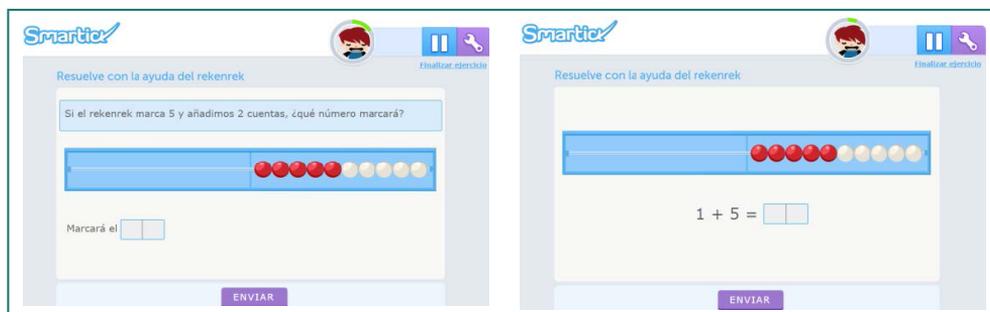


Figura 6. Problema de cambio esquematizado y suma horizontal.



Figura 7. Ampliación de los significados de la suma.

subitizando siete casillas, aprovechando que las casillas están coloreadas como el *rekenrek*. Por otra parte, un aspecto llamativo al usar la banda numérica virtual, es que utilizamos un cursor ventana, que enfatiza una lectura cardinal, pero al ir desplazando el cursor las 7 casillas quedan oscurecidas, y las cifras en blanco, enfatizando una lectura acumulada de las siete casillas iniciales. Esta distinción entre los dos tipos de lectura de una banda numérica se puede ver en Brissiaud (1993).

LA MODELIZACIÓN EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

En las actividades anteriores hemos aprendido a establecer relaciones básicas entre distintos tipos de representaciones numéricas. También hemos pasado del conteo a la subitización. Después de aprender el manejo básico del *rekenrek*, podemos usarlo como modelo para resolver problemas aritméticos y para hacer operaciones sencillas. En la Figura 6 se plantea el problema: “Si el *rekenrek* marca el 5 y añadimos 2 cuentas, ¿qué número marcará?” Este tipo de problema aparece repetido con diferentes cantidades de cuentas.

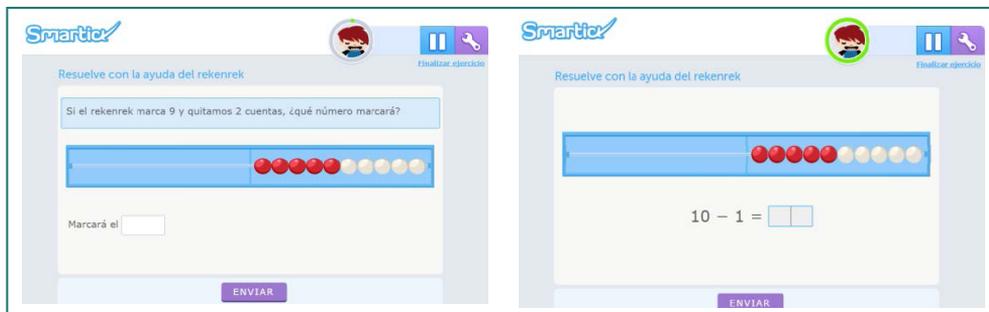


Figura 8. Problema de cambio decreciente esquematizado y resta horizontal.



Figura 9. Ampliación de los significados de la resta.

Aunque puede considerarse un problema aritmético verbal, se trata de un problema “esquemático” cuyo enunciado no evoca una situación de la vida ordinaria, sino que presenta un problema concreto sobre el manejo del *rekenrek*. El objetivo de este problema es establecer el significado informal básico para la suma (añadir), previamente a la introducción formal de la suma, en una actividad posterior (Figura 6, derecha). En la Figura 7, tratamos, con otros problemas de este tipo, de ampliar los significados de la suma, usando esquemas de combinación, comparación e igualación.

Igualmente, en la resta se comienza con un problema de cambio decreciente con incógnita en la cantidad final. Se trata de un problema de quitar “esquemático”. En la Figura 8, vemos el ejemplo de poner 9 cuentas en el *rekenrek* y quitar 2. Este es el significado básico que planteamos para la resta (quitar). Posteriormente, pasamos a actividades de resta escritas en horizontal (Figura 8, derecha), que pueden modelizarse también en el *rekenrek*, como se hace en el problema anterior.

Después de introducir la resta, presentamos problemas esquematizados de combinación, comparación e igualación que se resuelven con la resta. Ejemplo de este tipo de problemas (de comparación) lo vemos en la Figura 9, donde ejemplifico en el *rekenrek* cómo puede modelizarse cada uno de los problemas. A continuación, los problemas aritméticos verbales esquematizados dejan paso a problemas verbales que evocan contextos de la vida cotidiana.

REFLEXIONES FINALES

Las actividades que he presentado pueden hacerse con niñas y niños de 4 a 6 años, pero no agotan el uso del *rekenrek*. La continuación natural es el uso de este modelo visual para el aprendizaje de estrategias de cálculo mental, como el paso al diez o el uso de dobles. El trabajo con el *rekenrek* puede contribuir a dar respuesta a un problema que nos encontramos a diario en las aulas de educación primaria: ¿Cómo conseguir que los niños dejen de utilizar los dedos para contar y pasen a utilizar estrategias de cálculo mental? Mientras que el conteo de objetos resulta fundamental para el aprendizaje numérico en educación infantil, y al inicio de la educación primaria, llega un momento en que los pequeños deben calcular con fluidez, usando estrategias más eficientes que las de conteo. Todo el trabajo de visualización que se hace con configuraciones numéricas constituye un intento de respuesta a esta problemática.

Retomando ideas de la introducción, pienso que es necesario que en los currículos de educación infantil y primaria aparezca explícitamente la subitización, como un procedimiento de cuantificación más, junto con el conteo, la correspondencia uno a uno, o la estimación. Cuando un conocimiento no tiene el estatus de “contenido a estudiar, presente en el currículo” es muy difícil que se incluya de forma adecuada en el trabajo en el aula. Cada vez hay más propuestas, como la de *Smartick* que he presentado aquí, la de Clements y Sarama (2009), o la de materiales como el Numicon, que inciden en un desarrollo sistematizado de la subitización conceptual a través del uso de diferentes configuraciones.

Con respecto a los materiales manipulativos, a medida que se van desarrollando recursos online para el aprendizaje de las matemáticas, se establecen comparaciones más ricas y matizadas entre los materiales manipulativos físicos y sus análogos virtuales. Así, por ejemplo, en algunos geoplanos virtuales aparece coloreado el interior de la figura delimitada por la goma elástica virtual, y esto facilita la consideración de una figura como región del plano, que no debe confundirse con su borde. También en la banda numérica que hemos visto en la Figura 5, las casillas se van coloreando al arrastrar el cursor, permitiendo varias lecturas alternativas y complementarias en el modelo que enriquecen la concepción infantil del número.

Espero que las ideas que he presentado en este artículo sirvan de estímulo a maestras y maestros, para introducir la subitización y el uso de configuraciones en las aulas, y para incorporar cada vez más recursos didácticos tecnológicos, teniendo una idea clara de lo que aportan dichos recursos a los primeros aprendizajes numéricos infantiles.

REFERENCIAS

- Blanke, B. (2008). *Using the rekenrek as a visual model for strategic reasoning in mathematics*. Salem, OR: The Math Learning Center. Recuperado de: mathlearningcenter.org/media/Rekenrek_0308.pdf
- Brissiaud, R. (1992). A toll for number construction: Finger Symbol Sets. En J. Bideaud, C. Meljac y J.P. Fischer (eds.), *Pathways to number: Children's Developing Numerical Abilities* (pp. 191-208). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo: Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos*. Madrid: Visor.
- Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics*, 5(7), 400-405.
- Clements, D.H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.
- Fischer, J.P. (1992). Subitizing: The discontinuity after three. En J. Bideaud, C. Meljac y J.P. Fischer (eds.), *Pathways to number: Children's Developing Numerical Abilities* (pp. 191-208). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kamii, C. (1995). *El número en la educación preescolar*. Madrid: Visor.
- Mialaret, G. (1955/1967). *Pedagogía de la iniciación en el cálculo*. Buenos Aires: Kapelusz.
- Secadas, F. (Coord.) (2004). *Contar es fácil: Fundamentos psicopedagógicos del aprendizaje del cálculo*. Madrid: CEPE.
- Stern, C. y Stern, M.B. (1949). *Children discover arithmetic: An introduction to structural arithmetic*. New York: Harper & Row, Publishers.