Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2017, Vol. 34, nº 95, 115-130*

RINCÓN "SAPERE AUDE"… ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

Con el número 94, hemos acabado el año 2016 con las entregas al día de nuestra revista. Con esta aportación modestia aparte, tal vez sea necesario, con el enfoque que le he dado a este "rincón", formular por mi parte algún tipo de exégesis para una interpretación crítica de los problemas que he venido resolviendo y planteando en los números anteriores. Los ejemplos propuestos pueden distinguirse entre lo que puede llamarse problema y lo que puede considerarse ejercicio. La idea es que con los ejercicios consigamos que el alumno ejercite en alguna técnica o procedimiento, que requiere poco razonamiento original o propio. De esta manera cuándo un estudiante empieza el estudio de algunas partes del álgebra, teoría de números, geometría… deberíamos los profesores ofrecerles un tipo de ejercicios asequibles y que los pueda resolver con las fórmulas o procedimientos adquiridos. La resolución de estos ejercicios ayudará a consolidar su dominio de las fórmulas, expresiones,... y asegurará su capacidad de emplearla. Por lo tanto, un ejercicio siempre puede resolverse con una razonable prontitud y con un mínimo de razonamiento creativo. Por el contrario, con un problema, moviéndonos en el nivel adecuado, se requerirá que el alumno piense y razone en profundidad.

Debemos con ello incentivarle para que idee estrategias, con las que el éxito, a priori, no esté garantizado totalmente, pero que deben seguir adelante con esa idea de descubrimiento heurístico con la ayuda de textos, materiales, NNTT´s que le impulse a llevar a buen término su plan. Una vez resuelto el problema y de manera positiva haber obtenido la solución, impliquémosle en la idea de la reconsideración por si tiene que recurrir a nuevas estrategias de resolución que mejore la solución hallada: más deducciones, generalizaciones, aplicaciones u otros resultados. No hay posibilidad de exagerar la importancia de la Resolución de Problemas (RdP´s) en Matemáticas, por medio de ella se requiere bastante dominio de esta ciencia, y ser motivación de la introducción en el alumno de la permanente idea de la búsqueda de nuevas formas de atacar un problema. En definitiva, iniciarle en el mundo de la investigación en esta ciencia donde la creatividad es un parámetro definidor del buen estudiante.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta 1 del número anterior 94)

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

Ya hice el comentario en números anteriores que: "*… la enseñanza de la Geometría, probablemente sea una de las disciplinas dónde más desencuentros podemos encontrar entre enseñantes e investigadores en Educación Matemática…"*. Debemos dar respuesta a esta "encrucijada" planteándonos algunas cuestiones tan elementales como:

- ¿Cuál es la razón objetiva para aprender geometría?
- Nuestros estudiantes, ¿saben tan poco acerca de los contenidos geométricos desarrollados en los curricula?
- ¿Se está enseñando bien la Geometría en la etapa de formación de un estudiante de primaria? ¿Y de secundaria?
- ¿Se están utilizando adecuadamente las nuevas herramientas que ofrecen la NNTT´s para que el alumno visualice gráficamente los elementos matemáticos?
- ¿Qué debe aprender de Geometría?

Invito, una vez más a trabajar con ejercicios de geometría plana. Es una buena oportunidad de presentarla como una herramienta recia, útil y potente que faculta la mejora de la percepción y pensamiento deductivo que va a incidir en desarrollo de la competencia y capacidad de conceptualización y abstracción

Las dos joyitas que propusimos en el anterior número:

JOYITA: a) *En una hoja de papel se corta un agujero circular de 3cm. de diámetro. ¿Se puede hacer pasar una pieza de 4 cm. de diámetro?*

SOLUCIÓN

Es un ejercicio muy interesante que puede dar posibilidad a nuestros estudiantes de trabajar con papel. Sabemos que el papel aparte de servir para escribir desde su creación para tal fin, ha tenido un importante uso en las matemáticas, para lo que se ha requerido siempre una gran capacidad de observación cuando se manipula (S. Ferrero, 2008)

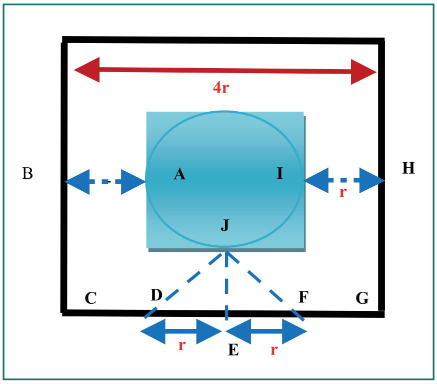


Fig.1. Agujero de radio r.

PASO 1

Supongamos el agujero de radio ***r*** perforado en el centro de una hoja cuadrada de lado ***4r***

PASO 2

Marquemos los cinco pliegues en líneas discontinuas, como se indican en la fig. 1, con las distancias DE=EF=r.

Repleguemos la mitad superior de la fig.2 por el pliegue BH como se observa en la fig.3.

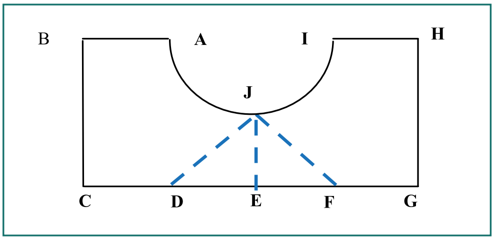


Fig.2. Esquema Simétrico.

PASO 3

Cada una de las manipulaciones que realicemos a continuación la haremos de forma simétrica sobre las dos mitades que aparecen:

Continuamos hasta llevar D sobre F para obtener la figura plana que aparece en la figura 4; en ella el triángulo isósceles (DEJ) aparece en perspectiva, con un "doble espesor" como sigue:

AJ y JI son dos cuartos de círculo de radio "r", estando los tres puntos alineados. Veamos cuánto miden (figura 5):

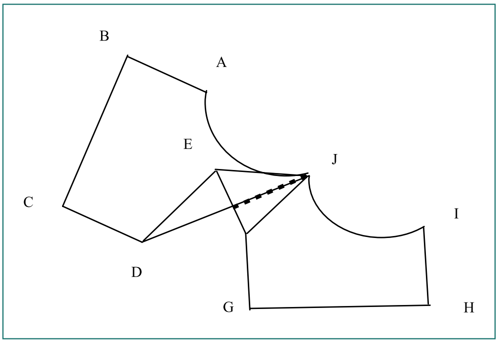


Fig.3. Despliegue 1.

$$AO = JO = r \Rightarrow AJ = \sqrt{(AO)^2 + (JO)^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r \Rightarrow AI = 2\sqrt{2}r$$

Por lo tanto, si $r = \frac{3}{2}cm$, el objeto descrito en la Fig. 4 está unido a su simétrico, pero la muesca AI es de longitud:

$$2\sqrt{2}\,\frac{3}{2}cm = 3\sqrt{2}cm = 3.(1.41421356)cm = 4.24264068cm$$

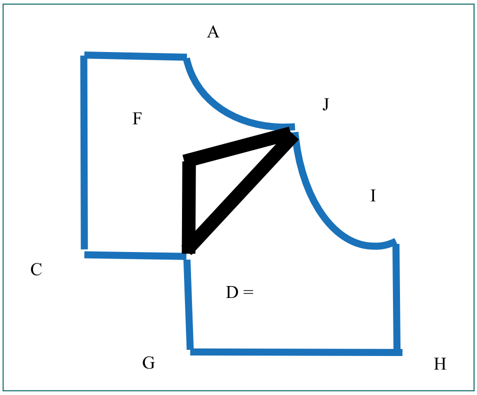


Fig. 4. Despliegue 2.

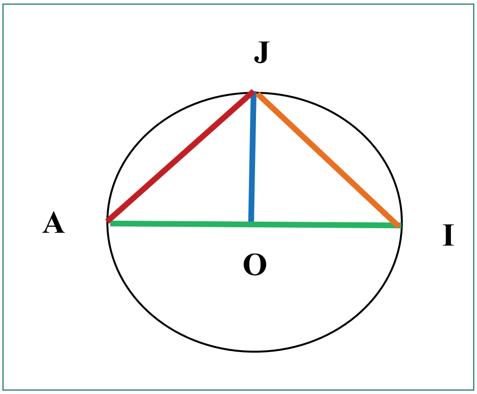


Fig. 5. Cuartos de círculos.

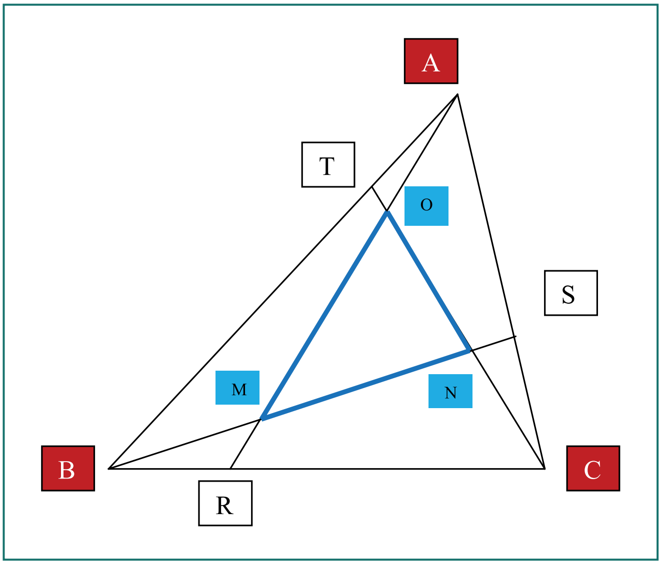


Fig. 6. Jardín Triangular.

Lo que permite que la pieza de *4 cm* pase con facilidad y holgura por el agujero circular de 3 cm.

NOTA: ¡Lo más interesante y curioso es que el modelo anterior podría funcionar incluso con una madera contrachapada en la que se perfore un agujero circular, donde los pliegues estuvieran ajustados por bisagras!

JOYITA: b) *Enrique quiere construir un jardín de forma triangular, MNO, limitado por un terreno también de forma triangular ABC y de área S, según aparece en la figura 6.*

Se sabe que moviendo los puntos R, S y T respectivamente sobre los lados BC, CA y AB, va a conseguir construir el jardín MNO de la siguiente forma: las rectas que pasan por A y R, B y S, y C y T se cortan en los puntos M, N y O. Si conocemos el valor de las razones BR/BC, CS/CA y AT/AB, determinar el área del jardín en forma triangular, MNO, que quiere construir Enrique en función del área S y las razones citadas.

SOLUCIÓN

Se trata de un ejercicio en el que aparece, de nuevo, el teorema de Menelao de Alejandría (alrededor de 70-130 d.C.) proporcionándonos un criterio de alineación.

PASO 1

De partida supongamos que las rectas BS y CT, (respectivamente, CT y AR, y AR y BS) no tienen más que un punto en común N, (respectivamente M, y O).

Designemos las razones ***BR/BC, CS/CA y AT/AB,*** por, respectivamente ***x, y, z.***

Los casos y=0, z=1, o de z=0 y x=1, o de x=0 e y=1 son excluidos, por razones obvias.

Sin pérdida de generalidad ninguna podemos admitir que el triángulo $\overset{\triangle}{MNO}$ es interior al triángulo $\overset{\triangle}{RAC}$.

Sea S=a(ABC) el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ y sea S'=a($\overset{\triangle}{MNO}$) el área del triángulo MNO. Es evidente que el área de los triángulos

a(RAB)= Sx, a(SAB)=Sy, a(TAC)=Sz, a(RAC)=S(1-x), a(SAB)=S(1-y), a(TBC)=s(1-z)

Aplicando el teorema de Menelao, atribuido a Menelao de Alejandría que dice:

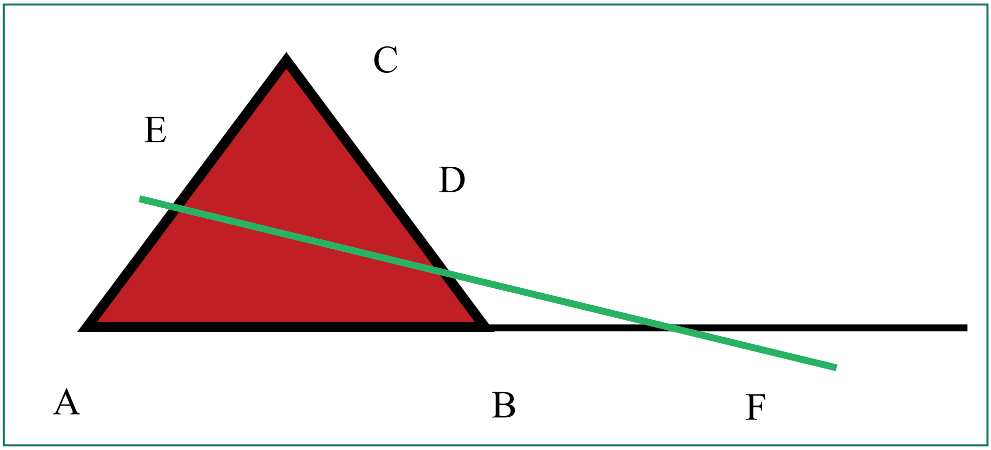


Fig. 7. Teorema de Menelao.

"Dados tres puntos A, B y C que forman el triángulo ABC, y los puntos E, D y F que se encuentran en las líneas de AC, BC, AB, entonces el teorema de Menelao dice establece que D, E, F son colineales si y solo sí:

$$\frac{EA}{EC}\cdot\frac{DC}{DB}\cdot\frac{FB}{FA}=1$$

Y si son segmentos dirigidos (concepto no muy habitual en los curricula de nuestro sistema educativo en España, basta con agregar una idea al concepto de segmento

AB=-BA, es decir, permutar el orden de los vértices hace variar de signo el segmento)

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}=-1$$

PASO 2

Si además tenemos en cuenta que si $y \neq 0$ y $z \neq 0$, se tiene que $\frac{NB}{NS}.\frac{CS}{CA}.\frac{TA}{TB}=1$, de dónde se deduce que

$$\frac{NB}{NS}=\frac{CA}{CS}.\frac{TB}{TA}=\frac{CA}{CS}.\frac{AB-TA}{TA}=\frac{1}{y}(\frac{1}{z}-1)=\frac{1-z}{yz}$$

$$S_1=a(SNC)=\frac{NS}{BS}S.y=\frac{1}{\frac{NB}{NS}+1}.S.y=\frac{1}{\frac{1-z}{yz}+1}.S.y=\frac{S.y^2z}{1-z+yz}$$

NOTA: En el caso de que $yz=0$, esta última expresión proporciona un resultado válido. Análogamente, se obtienen

$$S_2=a(TAO)=\frac{S.z^2y}{1-z+yz}$$

$$S_3=a(MBR)=\frac{S.x^2y}{1-y+xy}$$

Resulta por lo tanto que

$$a(MNCR)=S.y-S_3-S_1$$
$$a(NOAS)=S.z-S_1-S_2$$

De dónde

$$S^{'}=S(1-x)-S_1-(S.y-S_3-S_1)-(S.z-S_1-S_2)$$
$$S^{'}=S(1-x-y-z)+(S_1+S_2+S_3)$$
$$S'=S\frac{(-1+x+y+z-yz-zx-xy+2xyz)^2}{(1-z+yz)(1-x+zx)(1-y+xy)}$$

PASO 3

Por lo tanto

$$S'=S\frac{[xyz-(1-x)(1-y)(1-z)]^2}{(1-z+yz)(1-x+zx)(1-y+xy)}$$

NOTAS:

a) Las áreas coincidirán, $S=S^{'}$, si se cumple: $x=0,\ y=0,\ z=0$

$$x=1,\ y=1,\ z=1$$

b) Se tiene un área nula S'=0 para cuando

$$xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$$

c) Es interesante proponer al alumno que investigue casos particulares:

– Caso 1: $x = y = z = \frac{1}{2}$, y comprobar que S'=0

– Caso 2: $x = y = z$, y comprobar que

$$a(MNO) = S' = S.(1 - \frac{3x(1-x)}{x^2 - x + 1})$$

– Caso 3: $x = y = z = \frac{1}{3}$, y comprobar que

$$a(MNO) = S' = S(1 - \frac{6}{7}) = \frac{S}{7}$$

Proporciona un método muy curioso para redescubrir que este resultado lo podemos encontrar en el puzzle de Mikuzinski.

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ (SOLUCIÓN A LA PROPUESTA 2 DEL NÚMERO ANTERIOR 94)

Propuesta 2: cuatro joyitas numéricas

Siguiendo el mismo esquema que en números anteriores, en este Sapere Aude presentamos cuatro curiosas joyitas relativas a los números. Está en el espíritu del que suscribe estas líneas presentar ejercicios de la teoría elemental de números sin emplear técnicas procedentes de otros campos de las matemáticas. Pertenecen a la teoría elemental de números las cuestiones de divisibilidad, el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor, la factorización de los enteros como producto de números primos, la búsqueda de los números perfectos y las congruencias.....

En este ***sapere aude*** presento cuatro ejercicios con diferentes grados de dificultad tocando diferentes enfoques de la teoría de números en relación con otras partes de las Matemáticas.

JOYITA: a) *Demostrar que cada número de la sucesión*

49, 4489, 444889, 44448889, 4444488889,.......... *es un cuadrado perfecto, es decir, en cada número de la sucesión hay "**n**" números **4**, "**n-1**" números **8** y solo "1"* ***9.***

*(*Propuesto en la competición matemática de Slovenia en 1998)

SOLUCIÓN

PASO 1

Sea el número

n= 444……4888……..89

dónde hay n cuatro, n-1 ocho y un solo nueve.

Se tiene que

$$n = 444...4888....89 = 4a.10^n + 8a + 1$$

con

$$a = 111.......1$$

escribiendo *n* veces el número 1.

PASO 2

Por otro lado,

$$n = 4a(10^n + 2) + 1$$
$$10^n = 9a + 1$$

De aquí que

$$n = 4a(9a + 1 + 2) + 1$$
$$n = 36a^2 + 12a + 1 = (6a + 1)^2$$

que es un cuadrado perfecto.

JOYITA: b) *Cvada una de las cifras 1,2,3,4 y 5 es utilizada una sola vez para formar un número de 5 cifras. ¿Cuál es el valor de la suma de todos los números de cinco cifras que de esta manera se pueden formar?*

SOLUCIÓN

PASO 1

Con las cinco cifras 1,2,3,4 y 5 se pueden formar 120 números distintos, es decir, las permutaciones de los cinco elementos,

$$P_5 = 5.4.3.2.1 = 5!$$
$$P = \{[n = a_5a_4a_3a_2a_1] / n = a_1 + 10a_2 + 100a_3 + 1000a_4 + 10000a_5\}$$

Épsilon, 2017, Vol. 34, nº 95, 115-130, ISSN: 2340-714X

siendo el cardinal de P, *card(P)=120*. Nos piden calcular la suma de todos ellos

$$S = \sum_{1}^{120} a_5 a_4 a_3 a_2 a_1$$

PASO 2

De los 120 números distintos habr**á:**

- 24 que terminen en 1 (bastaría fijar el número 1 y permutar los otros cuatro), obtendríamos

$$P_4 = 4.3.2.1. = 4! \text{ que terminan en } 1.$$
$$a_5a_4a_3a_2 1$$

- Análogamente podemos decir de los números que terminan en 2,3,4 y 5.

$$P_4 = 4.3.2.1. = 4! \text{ que terminan en } 2$$
$$a_5a_4a_3a_1 2$$

$$P_4 = 4.3.2.1. = 4! \text{ que terminan en } 3$$

$$a_5a_4a_2a_1 3$$

$$P_4 = 4.3.2.1. = 4! \text{ que terminan en } 4$$

$$a_5a_3a_2a_1 4$$

$$P_4 = 4.3.2.1. = 4! \text{ que terminan en } 5$$

$$a_4a_3a_2a_1 5$$

Cada columna en la suma de los 120 números vale,

PRIMERA COLUMNA
24x1= 24
24x2= 48
24x3= 72
24x4= 96
24x5=120
En total: *36*0
SEGUNDA COLUMNA
360+36=396
TERCERA COLUMNA
360+39=399
CUARTA COLUMNA
360+39=399
QUINTA COLUMNA
360+39=399

PASO 3

Por lo tanto, la suma de los 120 números vale:
=3.999.960

$$S = \sum_{1}^{120} a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 = 3.999.960$$

Que podemos obtenerlo, también, de la expresión:

$$360\left(1 + 10 + 102 + 103 + 104\right) = (360)(11.111) = 3.999.960$$

JOYITA: c) *Se dispone de monedas sin ser capaces de sumar sólo 1 €, al tomar la totalidad o tomar unas pocas. ¿Cuál es la cantidad máxima que podemos juntar de estas monedas? (No hay ninguna con valor superior a € 1).*

SOLUCIÓN

PASO 1

Sea E el conjunto de los portamonedas que no permiten realizar la operación de obtener 1 €, y que no contienen ninguna pieza de valor superior a 1€, por ejemplo, uno de los casos, si las expresamos en céntimos contiene monedas de,

$$E = \left[50; 20; 20; 5\right]$$

Si P es uno de los portamonedas de E, su montante es limitado ya que P, al no poder llegar a 1€=100 céntimos contiene a lo sumo: una moneda de 50 ó 4 monedas de 20 ó 9 monedas de 10 ó 19 monedas de 5 ó 49 monedas de 2 ó 99 monedas de 1.

PASO 2

Sea P' el conjunto que contiene portamonedas de E de máximo montante.
Sea P subconjunto de P'.

a) Si P contiene [1;1], se puede reemplazar [1; 1] por [2] y el nuevo portamonedas está en P'. Incluso [2;2;2;2;2] puede ser reemplazado por [10], y así sucesivamente. Existe entonces en P' un porta moneda P'' que contiene: a lo sumo una moneda de 1; 4 monedas de 2 ; una de 5 ; una de 10 ;4 de 20 y una de 50. El montante de P'' es inferior o igual a 154 céntimos.

b) También la combinación [2;2;1] puede ser reemplazad por [5] y la combinación [20;20;10] puede ser reemplazada por [50] entonces existe en P' un porta moneda P'' que contiene: a lo sumo una moneda de 1; 4 de 2 ; una de 5 ;una de 10 ; 4 de 20; una de 50 y no la combinación [2;2;1] ni la combinación [20;20;10].

- O bien P'' contiene [10]. De lo anterior se deduce que P'' no contiene [20;20]. Entonces su montante no excede de 154 – 20 = 134 céntimos.

- O bien P'' no contiene [10] y entonces: a) o bien P'' contiene [1]. De lo anterior se deduce que P'' no contiene [2;2]. Entonces su montante no excede de 154 – 10 – 2 = 142 céntimos; b) o bien P'' no contienen [1] y entonces su montante no excede de 154 – 10 – 1 = 143 céntimos.

PASO 3

El montante máximo realizable es 1,43€ y se realiza la con el portamonedas

[5 ;20; 20 ;20 ;20;5;2;2;2; 2].

JOYITA: d*)* *Resolver el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned}(a+b+c)d &= 420\\(a+c+d)b &= 403\\(a+b+d)c &= 363\\(b+c+d)a &= 228\\\forall a,b,c,d &\in N\end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Como se indicaba en el número anterior, este ejercicio no presenta grandes dificultades, pero los alumnos de secundaria no están habituados a una presentación como esta: no se trata de un sistema de ecuaciones lineales.

PASO 1

Una solución muy ocurrente puede ser la dada por (M. Bauval-APMEP-Bulletin 504). Llamemos $p = a + b + c + d$, se tiene que

$$\begin{aligned}(p-d)d &= 420\\(p-b)b &= 403\\(p-c)c &= 363\\(p-a)a &= 228\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que 403 se puede descomponer en el producto de 13x31, podemos construir la tabla

b	1	13	31	403
p-b	403	31	13	1
p	404	44	44	404

PASO 2

En la ecuación

$$(p-d)d = 420 \Rightarrow pd - d^2 = 420 \Rightarrow d^2 - pd + 420 = 0$$

El discriminante $\Delta = p^2 - 4.420 = p^2 - 1680$, no es un cuadrado perfecto y por lo tanto

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{p^2 - 4.420} = \sqrt{p^2 - 1680}$$

a) No es una raíz entera para cuando p=404, ya que

$$\sqrt{404^2 - 1680} = \sqrt{161536} = 401{,}915441....$$

y por lo tanto $p \neq 44$

b) Por otro lado, para $p=44$ los discriminantes de las ecuaciones son respectivamente:

$$d^2 - 44d + 420 = 0$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{44^2 - 1680} = \sqrt{1936 - 1680} = \sqrt{256} = 16$$

$$c^2 - 44c + 363 = 0$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{44^2 - 1452} = \sqrt{1936 - 1452} = \sqrt{484} = 22$$

$$a^2 - 44a + 228 = 0$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{44^2 - 912} = \sqrt{1936 - 912} = \sqrt{1024} = 32$$

Que da lugar a las soluciones para:

$$d = \frac{44 \pm 16}{2} \Rightarrow (d_1 = 30 \wedge d_2 = 14)$$
$$c = \frac{44 \pm 22}{2} \Rightarrow (c_1 = 33 \wedge c_2 = 11)$$
$$a = \frac{44 \pm 32}{2} \Rightarrow (a_1 = 38 \wedge d_2 = 6)$$

PASO 3

En definitiva, se tiene la tabla

a	b	c	d
6 **ó** **38**	13 ó 31	11 ó 13	14 ó 30

Eligiendo el más pequeño de los valores para *a, b, c y d,* respectivamente la solución encontrada es

$$a = 6$$
$$b = 13$$
$$c = 11$$
$$d = 14$$

y es la ÚNICA SOLUCIÓN, ya que cualquiera de los otros valores significaría que

$$p=a+b+c+d>44$$

NOTA: ¡Es tarea del profesor la orientación al alumno en las diferentes estrategias de resolución del problema, como por ejemplo utilizar en este caso la teoría de la divisibilidad y los números primos!

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

Propuesta 1: dos joyitas numéricas

En este *Sapare Aude* presentamos dos joyitas con diferentes grados de dificultad tocando distintos enfoques.

Insisto en la idea de presentar ejercicios de la teoría elemental de números, sin emplear técnicas de gran dificultad procedentes de otros campos de las matemáticas. Pertenecen a la teoría elemental de números las cuestiones de divisibilidad, el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor, la factorización de los enteros como producto de números primos, la búsqueda de los números perfectos y las congruencias.. Usar la visualización, el razonamiento espacial y la modelización geométrica para resolver problemas...., predecir y describir los resultados de deslizar, girar formas bidimensionales,…

a) *Cambiando las cifras de las unidades y de las decenas, los resultados de las multiplicaciones siguientes no cambian:*

$$12 \text{ x } 42=21 \text{ x } 24= 504$$
$$24 \text{ x} 84= 42 \text{ x } 48= 2016$$

¿Será posible encontrar otras tres multiplicaciones que tengan esta propiedad?

b) *Se puede comprobar que*

$$3^2+4^2=5^2$$
$$3^2+4^2+12^2=13^2$$
$$3^2+4^2+12^2+84^2=85^2$$

*Determinar el valor más pequeño posible de **x+y** si **x** e **y** son enteros estrictamente positivos tales que*

$$3^2+4^2+12^2+84^2+x^2=y^2$$

Propuesta 2: dos joyitas geométricas

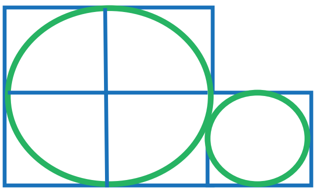
Decíamos en el número anterior que la enseñanza de la Geometría, probablemente sea una de las disciplinas dónde más desencuentros podemos encontrar entre enseñantes e investigadores en Educación Matemática. En esta sección quiero dejar patente que trabajar en la geometría plana se presenta como un instrumento potente desarrollar el pensamiento deductivo, el cual implícitamente considera el desarrollo de la capacidad de abstracción. También considero que trabajando en este estadio se consigue que el alumno se mueva en un espacio de erudición en el que es viable alcanzar la idea de matematización como reconocimiento de patrones, generalizaciones, elaboración de conjeturas, demostraciones, ... piezas claves en el proceso binomial de Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas.

Las actividades o tareas de investigación en geometría pueden ser aquéllas en las que el alumno indaga acerca de las características, propiedades y relaciones entre objetos geométricos con el propósito de dotarlas de significados. Probablemente es en este tipo de tareas donde se aprecia de mejor manera el enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la Geometría.

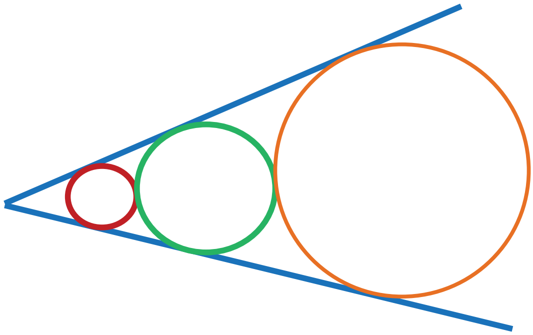
Un problema se concibe como una situación ante la cual no se cuenta con un proceso de resolución inmediato; si ya se sabe cómo resolverlo, entonces no es un problema. Es decir, podemos plantear a los alumnos problemas para *practicar* un conocimiento o problemas para *construir* un conocimiento, estos últimos son los que entran dentro de las tareas de investigación.

En este número presentamos al triángulo, al cuadrado, a la circunferencia como elementos centrales de las dos joyitas en el *sapere aude*.

a) Cada cuadrado pequeño mide (2cm)x(2cm). Si elegimos dos puntos, uno sobre cada círculo, ¿cuál es la distancia mínima entre tales puntos?



b) Si el radio del círculo más pequeño mide 2cm y que el del segundo círculo es de 3 cm, ¿cuál es el radio del tercer círculo?



¡Espero que disfrutéis con la propuesta!

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:

sapereaudethales@ gmail.com