Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2017, nº 96, 101-108

RINCÓN "SAPERE AUDE"... ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

La Geometría, como rama de las Matemáticas que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o el espacio y base teórica de la geometría descriptiva que da fundamento a instrumentos de diseño como el compás o el teodolito, o el sistema de posicionamiento global, tiene su origen en la RdP´s (Resolución de Problemas) relativos a medidas.

Comparando con otras ciencias o partes de ellas, Pascal la define como la "perfección e ideal inalcanzable", para mostrarla como acercamiento a la medida de lo posible a una "ciencia humana". Este ideal me lleva al convencimiento de que trabajar con Geometría "supone ver las cosas más claras". Por eso, en este rincón, aparecerá en cada volumen problemas de Geometría sencillos que permitan al alumno trabajar con cierta pericia para conseguir estrategias y modelos que le conduzcan a la resolución definitiva de los problemas.

¿Y los números? ¿Qué es un número?

Partiendo de la base del planteamiento de estas dos cuestiones, sin los números, no podemos hacer mucho en Matemáticas, y en esto creo que coincidimos todo el mundo.

Tal vez sea provocador cuestionárselo, sobre todo cuando todos creemos saber lo que es un número.

El objetivo del Rincón Sapere Aude consiste de la misma manera que con la Geometría, introducirnos en la "manipulación" de los números, por lo que es preceptivo que estamos en armonía con ellos.

Por ello es interesante saber lo que traemos entre manos para ¿saber la diferencia entre una cifra y un número? Muchos piensan que es lo mismo, pero no es así. Todos los números están compuestos de símbolos, llamados las cifras, hay diez: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Con estas diez cifras se pueden formar a todos los números que se desee. Diferentes enfoques y tipos de ejercicios sobre números abordaremos.

En esta sección, intentaré que aparezcan ejercicios y problemas relativos a la teoría de números, considerada como una rama de las Matemáticas que se ocupa de las propiedades de los números enteros y contiene muchos temas abiertos fáciles de entender, incluso para los no matemáticos. De manera más general, el campo de estudio de esta teoría se refiere a una amplia clase de problemas que vienen de forma natural a partir del estudio de los números enteros. La teoría de números tiene un lugar especial en las matemáticas, y también a través de sus conexiones con muchas otras áreas.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 95)

Propuesta 2: dos joyitas geométricas

Apuntábamos en el número anterior que una situación problemática puede ser una "realidad" que se concibe como un estado ante el cual no se cuenta con un proceso de resolución inmediato; si ya se sabe cómo resolverlo, entonces no es un problema. En este Sapere Aude presentamos al triángulo, al cuadrado, a la circunferencia como elementos centrales de las dos joyitas.

JOYITA: a) *Cada cuadrado pequeño mide (**2cm**)x(**2cm**). Si elegimos dos puntos, uno sobre cada círculo, ¿cuál es la distancia mínima entre tales puntos?*

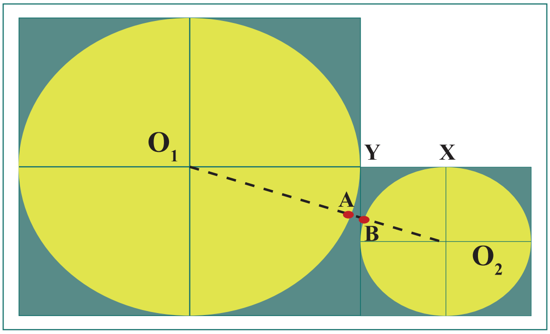


Fig. 1. Círculos en el interior de cuadrados.

SOLUCIÓN

PASO 1

Vamos a llamar O_1 y O_2 los centros de los dos círculos de la Fig.1. Los segmentos: $[O_1Y]$ tiene de longitud **2cm**, $[O_2B]$ **1 cm.** El segmento $[O_1O_2]$ corta, respectivamente, al círculo C_1 en A y al círculo C_2 en B.

Demostremos que la distancia mínima entre un punto de C_1 y otro punto de C_2 es justamente la distancia AB.

Efectivamente esta es la distancia.

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que pudiésemos encontrar otros dos puntos C y D en los dos círculos tales que CD<AB. En este caso,

$$O_1C+CD+DO_2<O_1A+AB+BO_2$$

Pero $O_1C=O_1A$ y $DO_2=BO_2$, y por lo tanto

$$O1C+CD+DO2<O_1A+AB+BO_2=O_1O_2$$

La existencia de C y D implicaría entonces la existencia de un camino más corto que el segmento $[O_1O_2]$ para llegar de O_1 a O_2 lo cual es absurdo.

PASO 2

De aquí se deduce que para encontrar la distancia mínima entre dos puntos pertenecientes a los dos círculos diferentes C_1 y C_2, es suficiente calcular la distancia entre los dos centros y después sustraerle los dos radios.

Cada lado de cada cuadrado pequeño, en YXO_2B por ejemplo, vale 2 cm, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo O_1O_2X se tiene que

$$(O_1O_2)^2=(2+1)^2+1^2=10 \Rightarrow O_1O_2=\sqrt{10}.$$

Por lo tanto, la distancia mínima buscada es $\sqrt{10}$ -2-1= $(\sqrt{10}-3)$ = 0.16227766 cm.

JOYITA: b) *Si el radio del círculo más pequeño mide 2cm y que el del segundo círculo es de 3 cm, ¿cuál es el radio del tercer círculo?* (Figura 2).

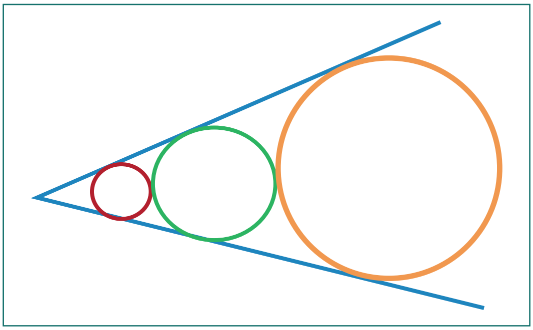


Fig. 2. Tres círculos tangentes entre dos rectas tangentes (I).

SOLUCIÓN

PASO 1

Sea $\boldsymbol{p}$ la longitud del radio del **círculo naranja**, AO_1=**p** y sea $\boldsymbol{s}$ la distancia existe entre el vértice B y el centro del **círculo rojo** BO_3=**s** (figura 3).

$$AO_1 = \mathbf{p};\ BO_3 = \mathbf{s}$$

Sabiendo que los triángulos BCO_3, BDO_2 y BAO_1 son semejantes, es decir, tienen sus ángulos iguales $\widehat{CBO_3} = \widehat{DBO_2} = \widehat{ABO_1}$ y sus lados proporcionales, como CO_3= 2 cm y DO_2=3cm, tenemos por tanto que al ser BO_2= $BO_3+O_3O_2$= s+(2+3), por la semejanza de los triángulos BCO_3 y BDO_2

$$\frac{s+2+3}{3}=\frac{s}{2}$$

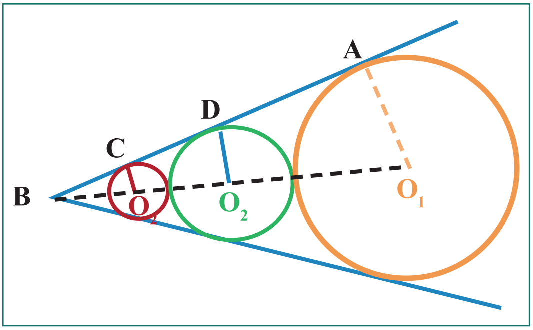


Fig. 3. Tres círculos tangentes entre dos rectas tangentes (II).

De esta ecuación en la variable s, se deduce que $2s + 10 = 3s \Rightarrow s = 10$

PASO 2

En el paso siguiente, utilizando la semejanza de los triángulos $\widehat{BAO_1}$ y $\widehat{BCO_3}$ se tiene que

$$\frac{s+2+3+3+p}{p}=\frac{s}{2}\Rightarrow\frac{s+8+p}{p}=\frac{s}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{10+8+p}{p}=\frac{10}{2}\Rightarrow\frac{p+18}{p}=\Rightarrow 5p=p+18$$

$$4p=18\Rightarrow p=4.5cm$$

NOTA: En este ejercicio se pone de manifiesto el uso de los criterios de semejanza de dos triángulos. Son un conjunto de condiciones tales que podemos aplicar al tener la seguridad de que se cumplen:

- **Criterio ángulo-ángulo** (*c-a-a*): Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales.
- **Criterio lado-ángulo-lado** (*c-l-a-l*): Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales e iguales el ángulo comprendido entre ellos.
- **Criterio lado-lado-lado** (*c-l-l-l*): Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.
- **Criterio lado-lado-ángulo** (*c-l-l-a*): Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo opuesto al mayor de ellos son respectivamente iguales.

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta 2 del número anterior 95)

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

Siguiendo el mismo esquema que en números anteriores, en este Sapere Aude presentamos dos curiosas joyitas relativas a los números con diferentes grados de dificultad.

Importante recordar la idea esbozada en el número 95: *"....presentar ejercicios de la teoría elemental de números, sin emplear técnicas de gran dificultad procedentes de otros campos de las matemáticas. Pertenecen a la teoría elemental de números las cuestiones de divisibilidad, el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor, la factorización de los enteros como producto de números primos, la búsqueda de los números perfectos y las congruencias..."*

JOYITA: a) *Cambiando las cifras de las unidades y de las decenas, los resultados de las multiplicaciones siguientes no cambian:*

12 x 42=21 x 24= 504
24 x84= 42 x 48= 2016

¿Será posible encontrar otras tres multiplicaciones que tengan esta propiedad?

SOLUCIÓN

PASO 1

Consideremos dos números de dos cifras **pq** y **rs, con p, q, r, s** $\in$ **N.**
Su producto vale entonces

$$(10\,p + q)\,.\,(10r + s) = 100\,pr + 10\,(qr + ps) + qs$$

Si cambiamos las cifras de las unidades y las decenas, estos números se convierten en **qp** y **sr,** y por lo tanto su producto se puede escribir así,

$$(10\,q + p)\,.\,(10s + r) = 100\,qs + 10\,(qr + ps) + pr$$

PASO 2

La cuestión planteada se satisfaría si se tiene que

$$pr{=}qs.$$

Es fácil encontrar tales números

p	q	r	s	pq	rs	qp	sr	pq.rs	qp.sr
1	2	6	3	12	63	21	36	12. 63=756	21.36=756
1	2	8	4	12	84	21	48	12.84=1008	21.48=1008
1	3	9	3	13	93	31	39	13.93=1209	31.39=1209
1	4	8	2	14	82	41	28	14.82=1148	41.28=1148

NOTA: Nos solicitaron solo tres, y una buena decisión será insistir: ¿podemos encontrar más soluciones? Si es así: ¿cuántas?
Por ejemplo, una cuarta solución sería la que se presenta en la cuarta fila.

JOYITA: b) *Se puede comprobar que*

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$
$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$$

Determinar el valor más pequeño posible de x+y si x e y son enteros estrictamente positivos tales que

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + x^2 = y^2$$

SOLUCIÓN

PASO 1

De la expresión

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 - x^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2 \Rightarrow y^2 - x^2 = 85^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2 - x^2 = 85^2 = 5^2.17^2.$$

PASO 2

Como $y^2 - x^2 = (y - x).\ (y + x)$ es el producto de dos números enteros positivos y que $y+x>y-x$ podemos contemplar estas cuatro posibilidades:

y - x	***y + x***	***x + y***
1	$5^2.17^2$	7225
5	5.17^2	1445
17	$5^2.17$	425
52	17^2	*289*

Por lo tanto, la respuesta a la cuestión planteada es que, el valor más pequeño posible para la suma $\boldsymbol{x + y}$ es **289.**

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

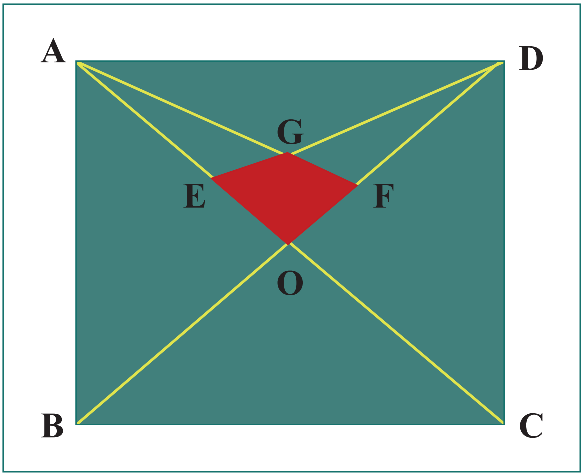
Propuesta 1: dos joyitas geométricas

La Geometría constituye uno de los campos más unido a los problemas reales que se nos plantea en la vida diaria. Es por eso que podemos afirmar que existen profusas posibilidades para estudiar y experimentar ideas y conceptos en el aula mediante el uso de materiales apropiados adecuados.

Es cierto que desde los años setenta, en España, con la aparición de los Movimientos de Renovación Pedagógica (MRP´s) el profesorado de los diferentes niveles de enseñanza de las Matemáticas con mayor concienciación, ha ido diseñando una cantidad importante de materiales para el trabajo en clase.

En geometría, existen casos en los que se presentan ciertas similitudes entre figuras; los conceptos de congruencia se establecen cuando las figuras son de la misma forma y tienen igual o diferente tamaño, para comprender un poco más la semejanza de triángulos.

En este número presentamos dos joyitas que utilizan para su resolución, aparte de la semejanza de triángulos, los teoremas de Thales y Pitágoras. Son con toda seguridad los resultados más importantes de la Geometría Elemental. Su aplicación en la RdP´s describe e interacciona con el espacio en el cual vivimos, es por ello que la Geometría puede ser considerada como "una herramienta" para el entendimiento, la tal vez la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad, como se dice ut-supra.



a) *Si 2EO=AE, 2FO=FD y que $\overline{ABCD}$ es un cuadrado de lado 4 cm, ¿cuál es el área de la región* coloreada en rojo*?*

b) *Sea $\overline{ABCD}$ un cuadrilátero tal que $\widehat{CAD}=25^o$, $\widehat{ACD}=45^o$ y $\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=20^o$. ¿Cuánto mide el ángulo $\widehat{DBC}$?*

Propuesta 2: tres joyitas numéricas

Decía Gauss: "*La matemática es la reina de las ciencias, pero la teoría de números es la reina de las matemáticas*".

Siempre he pensado que los números deben tener sentido porque es la actividad central en Matemáticas como se ha puesto de manifiesto a lo largo de la historia. Por ello es la actividad central en la RdP´s, y eso hace que el estudio de los números tenga sentido.

En este Sapere Aude presento tres ejercicios con diferentes grados de dificultad.

a) *Consideremos x, y, z, t* $\in$ N tales que

$$x<2y,\ y<3z,\ z<4t,\ y\ t<40.$$

¿Cuál es el valor mayor que puede tomar el número x?

b) *¿Cuántas combinaciones de tres (tripletas) números primos {x,y,z} satisfacen la ecuación*

$$x + y^2 + z^3 = 200?$$

c) *En el siguiente cuadro de número*

1 2 3
4 5 6
7 8 9

la suma de los elementos que están en las diagonales valen 15. Si escribimos cuadros que se construyen siguiendo el mismo criterio con:

C1. Los números del 1 al 64.

C2. Los números del 1 al 144.

¿Cuál será la suma de los elementos que están en cada una de las diagonales de los cuadros C1 y C2?

Generalizar al caso Cn: ¿cuál será la suma de los elementos de cada una de las dos diagonales del cuadro formado por los números del 1 a n^2?

NOTA: A este ejercicio se le puede sacar mucho jugo. Por ejemplo, pedir al alumno que investigue si hay alguna posibilidad de encontrar alguna relación entre las sumas obtenidas en los cuadros C1, C2,…Cn. ¡Investigar en este sentido podemos llegar a obtener una expresión para las progresiones aritméticas de orden superior!

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@ gmail.com