Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2018, nº 99, 75-96**

RINCÓN "SAPERE AUDE"… ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

INTRODUCCIÓN

Matemáticas: ¿dónde comenzó todo?

Hoy seguimos tratando la evolución de los conceptos e ideas matemáticas según su desarrollo histórico. En realidad, las matemáticas son tan antiguas como la propia humanidad: en los diseños prehistóricos de cerámica, tejidos y en las pinturas rupestres se pueden encontrar evidencias del sentido geométrico y del interés en figuras geométricas. Los sistemas de cálculo primitivos estaban basados, seguramente, en el uso de los dedos de una o dos manos, lo que resulta evidente por la gran abundancia de sistemas numéricos en los que las bases son los números 5 y 10.

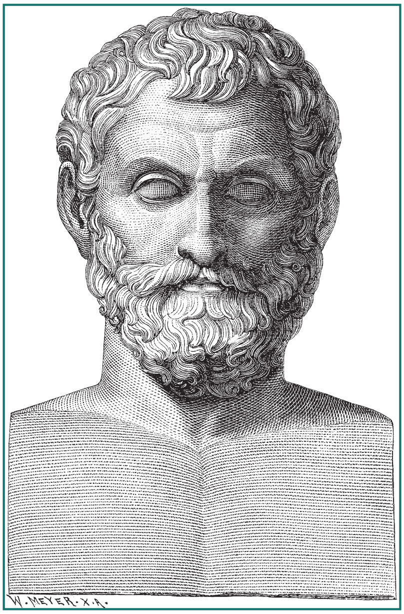

Fig. 1. Tales de Mileto. https://en.wikipedia.org/wiki/Thales_of_Miletus

Si Diofanto, Euclides, Arquímedes de Siracusa, Apolonio de Perge,…entre otros centraron la introducción histórica del Rincón anterior, hoy vamos a insistir sobre las Matemáticas en la antigüedad, concretamente las Matemáticas en Grecia.

Los griegos tomaron elementos de las matemáticas de los babilonios y de los egipcios. La innovación más importante fue la invención de las matemáticas abstractas basadas en una estructura lógica de definiciones, axiomas y demostraciones. Según los cronistas griegos, este avance comenzó en el siglo VI a.C. con Tales de Mileto y Pitágoras de Samos. A ellos, brevemente nos referiremos.

Tales de Mileto, (siglo VI a. C), filósofo reconocido como uno de los legendarios Siete Sabios, o "Sophoi", de la antigüedad. Es recordado principalmente por su cosmología basada en el agua como la esencia de toda la materia, con la Tierra como un disco plano flotando en un vasto mar. El historiador griego Diógenes Laërtius (siglo III d. C), citando a Apolodoro de Atenas (140 a. C), colocó el nacimiento de Tales durante la 35ª Olimpiada (aparentemente un error de transcripción, debería leerse la 39ª Olimpiada, 624 a. C su muerte en la 58ª Olimpiada (c.548-c.545 a. C.) a la edad de 78 años.

No existen escrituras de Tales que sobrevivan, y no existen fuentes contemporáneas. Por lo tanto, sus logros son difíciles de evaluar. La inclusión de su nombre en el canon de los legendarios Siete Sabios condujo a su idealización, y se le atribuyeron numerosos trabajos, muchos de ellos sin duda espurios, como "Conócete a ti mismo" y "Nada en exceso". Para el historiador Herodoto (hacia el año c. 484-c. 425 a. C), Thales fue un estadista práctico que abogó por la federación de las ciudades jónicas de la región del Egeo. El poeta y erudito Calímaco (c.305-c.240 a. C) registró la creencia tradicional de que Thales aconsejaba a los navegantes que se orientaran por la Osa Menor en lugar de a la Osa Mayor ambas constelaciones prominentes en el norte Hemisferio. También se dice que usó su conocimiento de la geometría para medir las pirámides egipcias y calcular la distancia desde la orilla de los barcos en el mar. Aunque tales historias son probablemente apócrifas, ilustran la reputación de Thales. El poeta y filósofo Jenófanes (hacia c. 560-c.478 a. C) afirmó que Thales predijo el eclipse solar que detuvo la batalla entre el rey Alyattes de Lidia (Anatolia, actual Turquía) (que reinó hacia c.610-c.560 a. C) y el rey Ciaxares de Media (Irán) (c. 625 –c.585 a. C), evidentemente el 28 de mayo de 585. Los eruditos modernos creen, sin embargo, que no podría haber tenido el conocimiento para predecir con precisión ni la localidad ni el carácter de un eclipse. Por lo tanto, su hazaña fue aparentemente aislada y solo aproximada; Heródoto habló de su predicción del año solamente. Que el eclipse fue casi total y ocurrió durante una batalla crucial contribuyó considerablemente a su exagerada reputación como astrónomo.

A Thales se le atribuye el descubrimiento de cinco teoremas geométricos: (1) que un círculo está bisecado por su diámetro, (2) que los ángulos en un triángulo opuesto a dos lados de igual longitud son iguales, (3) que los ángulos opuestos formados por intersección de las líneas rectas son iguales, (4) que el ángulo inscrito dentro de un semicírculo es un ángulo recto, y (5) que se determina un triángulo si se dan su base y los dos ángulos de la base. Sin embargo, sus logros matemáticos son difíciles de evaluar debido a la antigua práctica de acreditar descubrimientos particulares a hombres con una reputación general de sabiduría.

La afirmación de que Thales fue el fundador de la filosofía europea se basa principalmente en Aristóteles (c.384-c.322 a. C.), quien escribió que Tales fue el primero en sugerir un único sustrato material para el universo: el agua o la humedad. Según Aristóteles, Thales también sostuvo que "todas las cosas están llenas de dioses" y que los objetos magnéticos poseen almas en virtud de su capacidad de mover el alma de hierro, lo que en la visión griega distingue a las cosas vivientes de las no vivas, y movimiento y cambio (o la capacidad de mover o cambiar otras cosas) siendo característico de los seres vivos.

La importancia de Thales radica menos en su elección del agua como sustancia esencial que en su intento de explicar la naturaleza mediante la simplificación de los fenómenos y en su búsqueda de causas dentro de la propia naturaleza, más que en los caprichos de los dioses antropomórficos. Al igual que sus sucesores, los filósofos Anaximandro (c.610-c.546 / 545 a. C) y Anaxímenes de Mileto (floreció hacia c.545 a. C), consideran a Tales como el más que supo unir los mundos del mito y la razón.

Pitágoras, (Samos-c. 569 a. C., Metaponto c. 475 a. C.) filósofo, matemático y fundador griego de la hermandad pitagórica que, aunque de naturaleza religiosa, principios formulados que influyeron en el pensamiento de Platón y Aristóteles y contribuyeron al desarrollo de las matemáticas y la filosofía racional occidental. (Para un tratamiento más completo de Pitágoras y el pensamiento de Pitágoras, lo abordaremos más adelante).

Pitágoras emigró al sur de Italia alrededor del año 532 a. C, aparentemente para escapar de la dominación tiránica de Samos, y estableció su academia ético-política en Croton (ahora Crotona, Italia). Es difícil distinguir las enseñanzas de Pitágoras de las de sus discípulos. Ninguno de sus escritos ha sobrevivido, y los pitagóricos invariablemente apoyaron sus doctrinas citando indiscriminadamente la autoridad de su maestro. Sin embargo, a Pitágoras generalmente se le atribuye la teoría de la importancia funcional de los números en el mundo objetivo y en la música. Otros descubrimientos a menudo atribuidos a él (la inconmensurabilidad del lado y la diagonal de un cuadrado, por ejemplo, y el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos) probablemente fueron desarrollados más tarde por la escuela pitagórica. Más probablemente, la mayor parte de la tradición intelectual que se origina con el propio Pitágoras pertenece a la sabiduría mística en lugar de a la erudición científica.

¡El desarrollo del Pitagorismo se hará con más profundidad en el número siguiente 100!

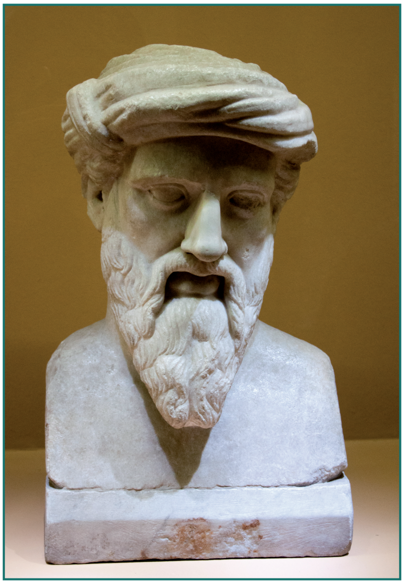

Fig. 2. Pitágoras de Samos https://es.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras.

Fig. 3. Pitágoras demostrando su teorema de Pitágoras en la arena usando un palo. https://www.britannica.com/biography/Pythagoras.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 98)

En el número 98 proponía dos ejercicios de naturaleza distintas. El primero es de corte clásico de geometría, tan olvidada como en multitud de ocasiones he (hemos) puesto de manifiesto en este rincón. Euclides aportó tanto y es de tal importancia que hasta la actualidad sus Elementos siguen vigentes, después de más de 2000 años de su formulación. Su aportación ha tenido amplia trascendencia a lo largo de la historia de las Matemáticas, el pensamiento de Euclides se enseñó (se sigue enseñando) hasta el siglo XVIII, mucho después de su tiempo, periodo en el que surgieron las llamadas geometrías no euclidianas (que, naturalmente abordaremos en ese rincón). La Geometría es concebida como la parte de la Matemática que trata de las propiedades de las figuras en el plano y en el espacio, y que junto a la Aritmética y el Álgebra y Análisis conforma el conjunto del edificio matemático. Pues bien, como afirma Gerhard Frey, "…hay diversas geometrías, pero sólo hay una aritmética…". En esta primera joyita, ponemos una de las aplicaciones del Teorema de Thales, que como sabemos lo descubrió mientras investigaba la condición de paralelismo entre dos rectas, concretamente utilizamos su recíproco.

El segundo, lo define Jean-Marc Desbonnez (Review-Losanges.Nº39-2017) como hacer Matemática para reír y para llorar: el smiley. Pequeñas figuras que evocan alegría, indiferencia, tristeza, sorpresa…, cuyo uso en las redes sociales, Whassap, Facebook, Instagram,….puede ir acompañado de mensajes y comentarios electrónicos.

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

JOYITA: a) Sea *PQRST* un pentágono convexo tal que los lados cumplen que $PQ = PR$, $PS = PT$ y los ángulos $RPS = PQT + PTQ$. Si el punto M es la mitad de QT, probar que el lado $RS = 2\ PM$.

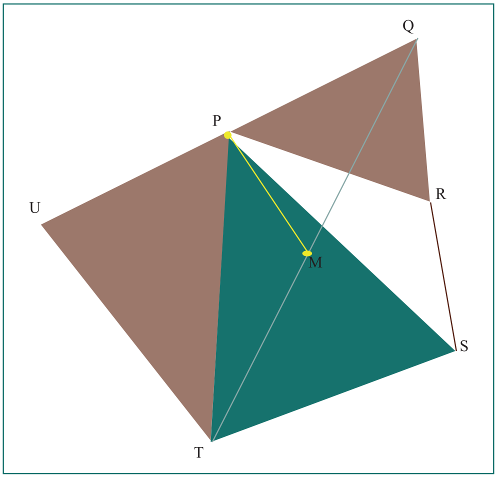

Fig.4. Pentágono Convexo.

SOLUCIÓN

PASO 1

Sea U el simétrico de Q con relación al punto P. Se tiene entonces que PU=PQ=PR y PS=PT.

PASO 2

El ángulo $\widehat{UPT}$ es exterior al triángulo QPT, así tendremos que

$$\widehat{UPT} = \widehat{PQT} + \widehat{PTQ}$$

y

$$\text{entonces } \widehat{UPT} = \widehat{RPS}\ .$$

Por el criterio de semejanza (LAL-Lado-Ángulo-Lado), que dice que. "Si un ángulo de un triángulo es isométrico a un ángulo de otro triángulo y los lados correspondientes de estos ángulos son proporcionales, entonces los dos triángulos son semejantes", aplicado a los triángulos RPS y UPT podemos afirmar que son isométricos y se cumple que los lados RS y UT son iguales.

PASO 3

Por ello, aplicando el recíproco del teorema de Thales al triángulo QUT que dice: "Si una recta r pasa por la mitad de uno de los lados de un triángulo y es paralela al otro lado entonces la recta corta al tercer lado por la mitad". De ahí que UT=2PM.

Se deduce entonces que

RS=2 PM csqd.

JOYITA: b) Con un poco e imaginación, para conseguir un smiley, utilizaremos puntos, círculos, segmentos, cónicas ,... ¡Ánimo!

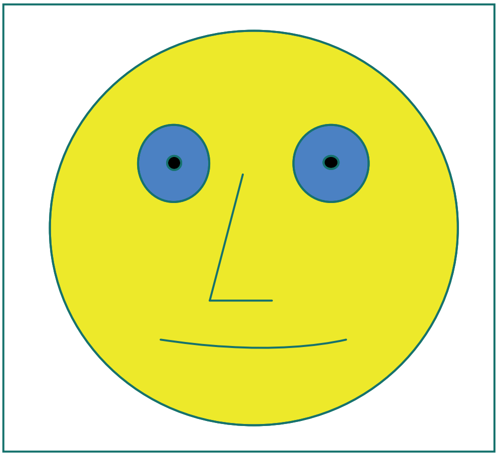

Fig. 5. Ejemplo. Smiley.

Construir un smiley con tres círculos (la cabeza y los dos ojos), cuatro puntos (las dos pupilas y los dos orificios de la nariz), dos segmentos (la nariz), y un arco de parábola (para la boca).

SOLUCIÓN

PASO 1

Para comenzar debemos elegir las dimensiones adecuadas que, naturalmente, pueden variar en función del tamaño y de la calidad artística que queremos impregnar el smiley: radios de los círculos, posiciones de los ojos, las pupilas, la boca,…. Nosotros lo haremos con el programa Geogebra, cuyo funcionamiento suponemos que el lector conoce mínimamente.

PASO 2

Comencemos por los ojos y la cabeza

Basta con conocer la ecuación cartesiana de un círculo de Centro $C(x_0, y_0)$ y de radio r cuya ecuación vendrá dada por la expresión

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Para el ejemplo que presentaremos más adelante en la Fig. hemos elegido:

a) Para la cabeza, la circunferencia

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2$$

centrada en el punto $C(0,0)$ y radio $r = 3$

b) Para los ojos,

b. 1. *Iquierdo:*

$$(x+1)^2 + (y-1)^2=(\sqrt{0.19})^2$$

b. 2. *Derecho*:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{0.19})^2$$

c) Para las pupilas

c. 1. *Izquierda*

El punto B de coordenadas (-1,1)

c. 2. *Derecha*

El punto A de coordenadas (1,1)

hemos elegido el color rojo, que a voluntad podemos cambiar.

d) Para la nariz y fosas nasales hemos elegido los puntos y segmentos que aparecen en la Fig. y que se detallan en la vista algebraica del fichero *ggb* adjunto.

Para la boca que la presentaremos animada

Utilizaremos para la boca un arco de parábola delimitado por la ecuación

$$y = kx^2 + b$$

siendo

- El valor de k nos mostrará la concavidad, cuyo sentido lo determinará el sentimiento de alegría o de tristeza que hará variar con la ayuda de un cursor. El intervalo de variación se centra en el valor 0, y el arco de parábola debe estar incluido en el círculo que hemos optado que represente la cabeza. Se ha elegido que k varía en el intervalo [-0.3,0.3] con un paso incremental de 0.1.
- El valor de b es el que determina la traslación en sentido vertical y debe ser negativo por las características de elección del dibujo de la cabeza, centrada en el origen de coordenadas O (0,0). En el caso que nos ocupa hemos tomado $b = -0.1$. De esta manera la boca queda conformada por la ecuación $y = kx^2 - 0.1$.
  NOTA. Cuándo k sea igual a 0, la posición de la boca estará en la recta horizontal $y = -0.1$, y que representaría una expresión de ¡indiferencia!
- El dominio de utilización está limitado.
  En este sentido la gráfica

$$y = kx^2 - 0.1$$

sobresale la ecuación

$$(x\text{-}0)^2 + (y\text{-}0)^2 = 32$$

Pero se puede limitar el dominio al intervalo [-1.2, 1.2] utilizando en Geogebra la función

$$\text{Si } [-1.2 < x < 1.2,\ kx2\text{-}0.1]$$

PASO 3

Movimiento de las pupilas

Para darle animación a las pupilas variamos el parámetro k.

- La pupila izquierda está situada en el punto (-1,1), por lo tanto, se desea hacerla variar horizontalmente sobre toda la anchura del ojo izquierdo, en el intervalo

$$[-1-\sqrt{0.19},\ -1+\sqrt{0.19}] = [-1.435,\ -0.56]$$

Es decir, debemos encontrar una fórmula que nos transforme un valor de k del intervalo [-0.3, 0,3] en un valor del intervalo [-1.435, -0.56].
Se trata de una transformacion lineal $f(x) = px + q$ tal que

$$f([-0.3,0.3]) = [-1.435,0.56]$$

obtenemos el sistema de dos ecuaciones con dos incognitas

$$-0.3\,p + q = -1.435$$

$$0.3\,p + q = -0.56$$

Cuya solución es $p = 1.458$, $q = -0.997$, que nos lleva afirmar que la nueva pupila izquierda tiene de coordenadas (1.458k-1,1)

- La pupila derecha está situada en el punto (1,1), por lo tanto, razonando de forma análoga sobre el intervalo [0.56,1.435], tenemos para la pupila derecha las nuevas coordenadas (1.458k+1,1).

El resultado podemos verlo en la evolución de las figuras siguientes desde ***la tristeza*** a ***la alegría*** pasando por ***la indiferencia***:

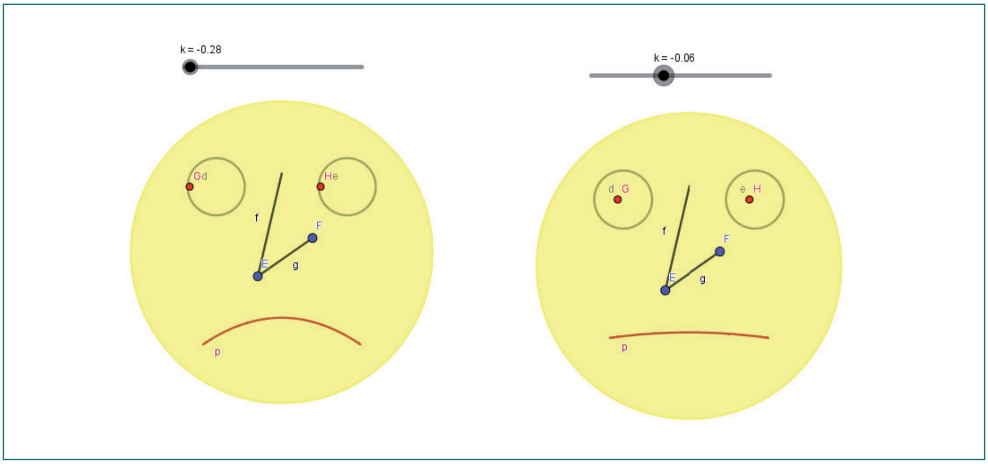

Fig. 6. Evolución de la tristeza en Smiley.

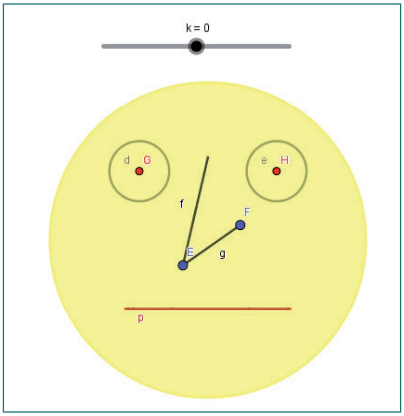

Fig. 7. Indiferencia del Smiley.

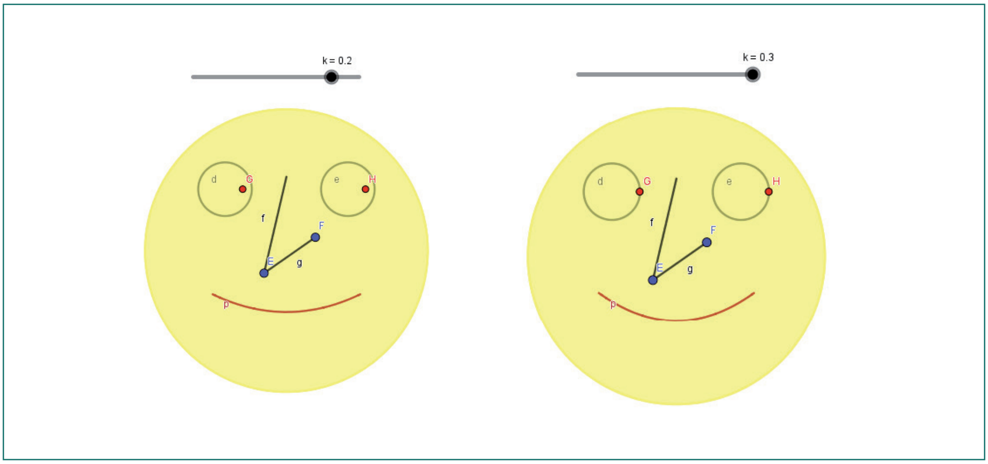

Fig. 8. Evolución de alegría en Smiley.

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

En el primer ejercicio resolveremos una ecuación, denominada ciclométrica, en la que aparecen cocientes de términos de la sucesión de Fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55 ,89,144,233,377, 610,……

Presentaré también, un método geométrico utilizando triángulos rectángulos.

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

JOYITA: a) Demostrar sin ayuda de ninguna calculadora que

$$arctg = \frac{144}{233} + arctg\,\frac{89}{377} = \frac{\pi}{4}$$

SOLUCIÓN

Paso 1

En la sucesión de Fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,**89,144,233, 377**,610…, aparecen los términos 89,144,233 y 377 que a su vez están en la igualdad que tenemos que demostrar y que son cuatro términos consecutivos de la citada sucesión que cumplen:

$$377=233+144$$

$$89= 233-144$$

- Probemos si la igualdad citada ut-supra se cumple para otros cuatro términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, por ejemplo: 1,1,2,3

Veamos si

$$arctg\,(\frac{1}{2}) + arctg\,(\frac{1}{3}) = (\frac{\pi}{4})$$

En efecto. Si llamamos

$$arctg\,(\frac{1}{2}) = x \Rightarrow tg\,(x) = (\frac{1}{2})$$

$$arctg\,(\frac{1}{3}) = y \Rightarrow tg\,(y) = (\frac{1}{3})$$

De aquí, veamos si

$$arctg\,(\frac{1}{2}) + arctg\,(\frac{1}{3}) = x + y$$

es igual a $\frac{\pi}{4}$.

Utilizando la fórmula trigonométrica de la tangente de la suma.

$$tg\,(x+y) = \frac{tg\,(x) + tg\,(y)}{1 - tg\,(x).\,tg\,(y)} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{6-1}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \Rightarrow x + y = arctg\,(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$arctg\,(\frac{1}{2}) + arctg\,(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$$

De la misma manera se puede comprobar que

$$arctg\,(\frac{5}{8}) + arctg\,(\frac{3}{13}) = \frac{\pi}{4}$$

PASO 2

La pregunta que nos hacemos: ¿Se puede generalizar a cualquier cuaterna de números sucesivos en la sucesión de Fibonacci? El problema se enunciaría así:

Para cualquier número natural "n" demostrar que

$$arctg\,(\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}) + arctg\,(\frac{F_n}{F_{n+3}}) = \frac{\pi}{4}$$

dónde Fn designa el número de la sucesión de Fibonacci de rango "n".

Siguiendo un razonamiento análogo se tiene,

$$arctg(\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}) = x \Rightarrow tg(x) = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$$
$$arctg(\frac{F_{n}}{F_{n+3}}) = y \Rightarrow tg(y) = \frac{F_{n}}{F_{n+3}}$$

$$tg(x+y) = \frac{tg(x)+tg(y)}{1-tg(x).tg(y)} = \frac{\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}+\frac{F_n}{F_{n+3}}}{1-\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}.\frac{F_n}{F_{n+3}}} = \frac{F_{n+1}.F_{n+3}+F_n.F_{n+2}}{F_{n+2}.F_{n+3}-F_n.F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}.(F_{n+1}+F_{n+2})+F_n.(F_{n+1}+F_n)}{(F_{n+1}+F_n).F_{n+3}-F_n.F_{n+1}}$$

$$tg(x+y) = \frac{F_{n+1}.(F_{n+1}+F_{n+2})+F_n.(F_{n+1}+F_n)}{(F_{n+1}+F_n).F_{n+3}-F_n.F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}{}^2+F_{n+1}.F_{n+2}+F_n.(F_{n+1}+F_n)}{(F_{n+1}+F_n).F_{n+3}-F_n.F_{n+1}}$$

$$tg(x+y) = \frac{F_{n+1}{}^2+F_{n+1}.(F_{n+1}+F_n)+F_n.(F_{n+1}+F_n)}{(F_{n+1}+F_n).(F_{n+2}+F_{n+1})-F_n.F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}{}^2+F_{n+1}{}^2+F_{n+1}F_n+F_n.F_{n+1}+F_n^2}{(F_{n+1}+F_n).(F_{n+2}+F_{n+1})-F_n.F_{n+1}}$$

$$tg(x+y) = \frac{F_{n+1}{}^2+F_{n+1}{}^2+F_{n+1}F_n+F_n.F_{n+1}+F_n^2}{(F_{n+1}+F_n).(F_{n+2}+F_{n+1})-F_n.F_{n+1}} = \frac{2F_{n+1}{}^2+2F_{n+1}F_n+F_n^2}{(F_{n+1}+F_n).(F_{n+2}+F_{n+1})-F_n.F_{n+1}}$$

$$tg(x+y) = \frac{2F_{n+1}{}^2+2F_{n+1}F_n+F_n^2}{(F_{n+1}.F_{n+2}+F_n.F_{n+2}+F_{n+1}{}^2+F_n.F_{n+1})-F_n.F_{n+1}}$$

$$tg(x+y) = \frac{2F_{n+1}{}^2+2F_{n+1}F_n+F_n^2}{F_{n+1}.F_{n+2}+F_n.F_{n+2}+F_{n+1}{}^2} = \frac{2F_{n+1}{}^2+2F_{n+1}F_n+F_n^2}{F_{n+1}.(F_{n+1}+F_n)+F_n.(F_{n+1}+F_n)+F_{n+1}{}^2} = \frac{2F_{n+1}{}^2+2F_{n+1}F_n+F_n^2}{F_{n+1}{}^2+F_{n+1}F_n+F_n.F_{n+1}+F_n^2+F_{n+1}{}^2}$$

$$tg(x+y) = \frac{2F_{n+1}{}^2+2F_{n+1}F_n+F_n^2}{F_{n+1}{}^2+F_{n+1}F_n+F_n.F_{n+1}+F_n^2+F_{n+1}{}^2} = \frac{2F_{n+1}{}^2+2F_{n+1}F_n+F_n^2}{2F_{n+1}{}^2+2F_{n+1}F_n+F_n^2} = 1 \Rightarrow x+y = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

De aquí que

$$arctg\,(\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}) + arctg\,(\frac{F_n}{F_{n+3}}) = \frac{\pi}{4}$$

PASO 3

Podemos trabajar desde el punto de vista geométrico la igualdad que nos ocupa

$$arctg\,(\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}) + arctg\,(\frac{F_n}{F_{n+3}}) = \frac{\pi}{4}$$

Construyamos los números de la sucesión de Fibonacci así.

a) A un cuadrado de lado 1 unidad de longitud se le adjunta otro cuadrado de lado 1 para construir un rectángulo de 2x1.

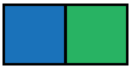

Fig. 9. Nivel 1-Sucesión de Fibonacci.

b) A esta figura se le adjunta un cuadrado de lado 2 para construir un rectángulo de 3x2

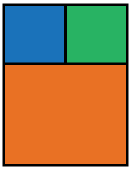

Fig. 10. Nivel 2-Sucesión de Fibonacci

c) A la obtenida se adjunta un cuadrado de lado 3 para construir un rectángulo de 5x3, y así sucesivamente.

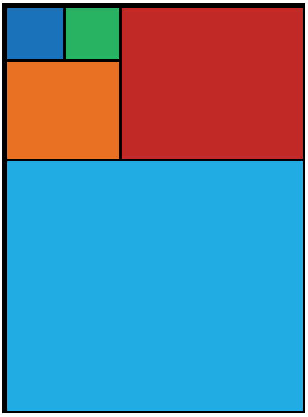

Fig. 11. Nivel 3-Sucesión de Fibonacci

En resumen, las etapas intermedias se obtienen adjuntando un cuadrado  a un rectángulo  al que se le adjunta otro cuadrado para obtener un rectángulo.

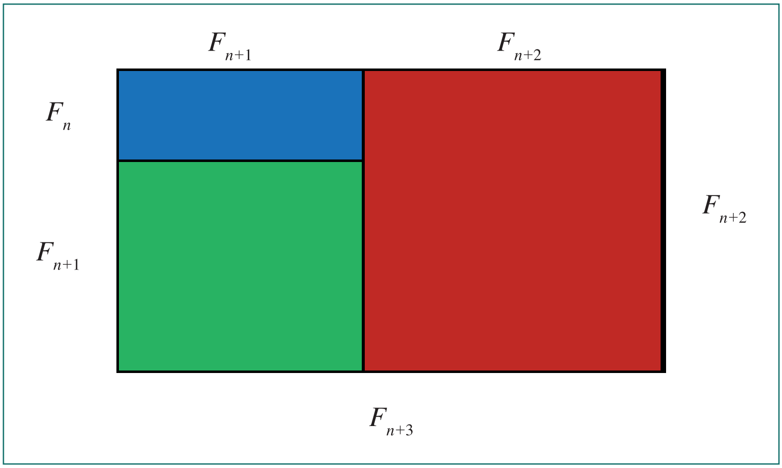

Fig.12. Nivel n-Sucesión de Fibonacci

En la figura

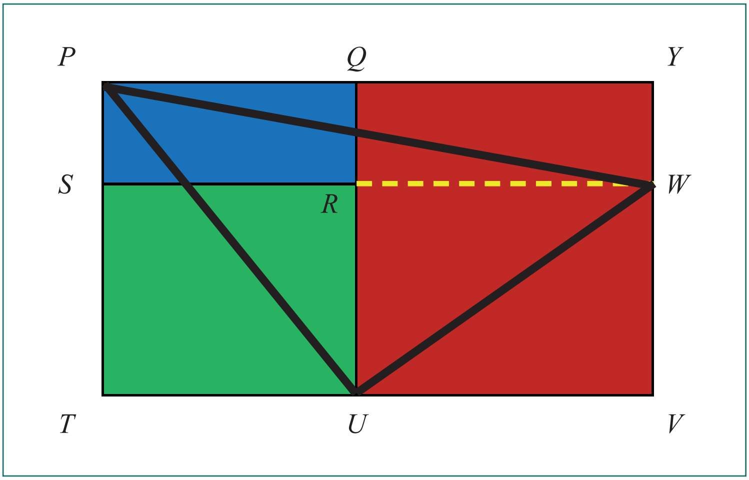

Fig.13. Método Geométrico. Nivel n-Sucesión de Fibonacci

a) Los rectángulos PQUT y RWVU isométricos porque tienen la misma longitud $F_{n+2} = F_n + F_n + 1$ y la misma anchura.
b) Sus diagonales tienen la misma medida $PU = WU$.
c) Los triángulos PTU, UQP y WRU son isométricos.

d) Los ángulos *QUP* y *WCR* son complementarios y por lo tanto el ángulo *WUP* es un ángulo recto.

Por lo tanto, el triángulo *PUW* es isósceles y rectángulo en el vértice *U*. Los ángulos en la base valen entonces $\frac{\pi}{4}$.

El ángulo en la base *UWP* es la suma de los ángulos *RWU* y *PWS*, el primero en el triángulo *WRU* rectángulo en *R* y el segundo en el triángulo *PSW* rectángulo en *S*. Por ello, se tiene que $RWU + PWS = \frac{\pi}{4}$

Usando la razón trigonométrica tangente:

$$tg\,(RWS) = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$$

$$tg\,(PWS) = \frac{F_n}{F_{n+3}}$$

Por lo tanto,

$$arctg\left(\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\right) + arctg\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Debemos notar entonces que con el criterio como se ha construido la Fig. 12, se puede generalizar el resultado obtenido a otros valores que se conformen como términos de la sucesión de Fibonacci. Llegamos a la conclusión de que los diferentes rectángulos forman una progresión en recurrencia:

$$r_2 = r_1 + r_0$$

y

$$r_3 = r_2 + r_1$$

con representando, respectivamente el ancho y el largo del rectángulo inicial. La sucesión es una sucesión de Fibonacci generalizada.

NOTA. Así podemos proponer a nuestros alumnos que demuestren las igualdades siguientes

$$arctg\left(\frac{9+2\sqrt{3}}{15+3\sqrt{3}}\right)+arctg\left(\frac{6+\sqrt{3}}{24+5\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$arctg\left(\frac{1+3\sqrt{7}}{\frac{3}{2}+5\sqrt{7}}\right)+arctg\left(\frac{\frac{1}{2}+2\sqrt{7}}{\frac{5}{2}+8\sqrt{7}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$arctg\left(\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{11}}{3\sqrt{5}+5\sqrt{11}}\right)+arctg\left(\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{11}}{5\sqrt{5}+8\sqrt{11}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

¡Este tipo de ejercicio, hace realidad que la Teoría de Números y Geometría!, juntas representan una de las actividades más interesantes para abrir la mente a nuestros estudiantes. Por muy sofisticado que parezca, comprender la gran magia y el poder de los números nos ayudará a resolver situaciones que quedan establecidas en la construcción del modelo matemático como abstracción de la realidad.

JOYITA: b) En este segundo ejercicio, sin necesidad de utilizar calculadora y sin desarrollar, de forma razonada resolver las cuestiones siguientes:

b. 1. *¿En qué cifra termina 1!+2!+3!+4!+5! ?*
b. 2. *¿Y 1!+2!+3!+4!+5!+.....+10! ?*
b. 3. *¿Y 1!+2!+3!+4!+5!+6!+………....100! ?*
b. 4. *Tal vez asuste un poco la pregunta. ¿y 1!+2!+3!+……………+1000! ?*
b. 5. *¿Podemos sacar una conclusión para la suma*

$$\sum_{i=1}^{n} i!$$

siendo n cualquier número positivo?

SOLUCIÓN

PASO 1

b. 1. Veamos en que cifra termina el número expresado en forma factorial

1!+2!+3!+4!+5!

Sabemos que

1!=1

2!=1.2=2

De ahí que 1!+2!=3

3!=1.2.3=6

4!= 1.2.3.4=24

De aquí se deduce que, 3!+4!=6+24=30=3.10, termina en cero.

5!= 1.2.3.4.5=120=12.10, por lo tanto 5!, termina en cero.

Por lo tanto [1!+2!]+[(3!+4!)+5!]= [1+2]+ (3+12).10= 3+15.10, termina en 3.

PASO 2

b. 2. ¿Y *1!+2!+3!+4!+5!+.....+10!* ?

6!=6.5!=6.12.10=72.10, termina en cero

7!=7.6!=504.10, termina también en cero,

Y así sucesivamente de 8!, en adelante todos los números terminan en cero.

1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!+9!+10!=[1!+2!+3ª+4!+5!]+[6!+7!+8!+9!+10!]=A+B

Siendo A=[1!+2!+3!+4!+5!] y B=[6!+7!+8!+9!+10!]

El número A termina en 3, y el B termina en 3, por lo tanto

1!+2!+3!+….+8!+9!+10!, termina en 3.

PASO 3

b. 3. ¿Y *1!+2!+3!+4!+5!+6!+……....100!* ?

El número

1!+2!+3!+4!+5!+6!+………..100!=
=[1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!+9!+10!]+[11!+12!+….+100!]=
=A+[11+12.11+13.12.11+……..+100.99.98….11]10!= A+B

siendo

A= [1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!+9!+10!]

B= [11!+12!+….+100!]= A+[11+12.11+13.12.11+……..+100.99.98….11]10!

Ya hemos visto que A termine en 3, y B termina en 0, Por lo tanto,

1!+2!+3!+4!+5!+6!+………..100! termina en 3.

PASO 4

b. 4. ¿Y *1!+2!+3!+……………+1000!* ?

Análogamente se llega a que 1!+2!+3!+4!+5!+…………+999!+1000!, es un número que termina en 3.

PASO 5

b. 5. Para cualquier $n \in N$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} i! = \begin{pmatrix} 1 & i= & 1 \\ 3 & i= & 2 \\ 9 & i= & 3 \\ 3 & i= & n \in N, n \geq 4 \end{pmatrix}$$

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

En mi reflexión sobre la necesidad de que la Geometría esté siempre presente, y de manera adecuada en los currículo de primaria y secundaria, me parece interesante el trabajo de Pierre Stegen Christine Géron (Haute Ecole de la Ville de Liège) y Sabine Daro (ASBL Hypothèse), "Favoriser le développement du langage géométrique à la liaison primaire secondaire" cuya lectura recomiendo

http://www.hypothese.be/upload/files/geometrie.pdf

Éste y otros trabajos de investigación en Didáctica de las Matemáticas evidencian que la transición de la escuela primaria a la secundaria se caracteriza por la enseñanza de la Geometría, por un cambio bastante radical. Vamos de una geometría esencialmente práctica (basada en la percepción visual luego experimentación) a una geometría más teórica (también llamada axiomática basada en el uso de propiedades).

El objetivo es delinear un marco que ubique el rol y el lugar de la adquisición del lenguaje en el aprendizaje de la geometría en la conexión primaria-secundaria para comprender mejor los trabajos de construcción geométrica que estamos proponiendo en el Rincón Sapere Aude.

En la propuesta de este número presentamos dos joyitas:

a) el primer caso de trata de un problema de manipulación, modelización y optimización que consiste en determinar la forma y las dimensiones de un canal (¡bien podría ser una alcantarilla!) de volumen máximo construido a partir de una hoja de zinc de una determinada longitud (M.F.Guisard, I. Wettendorf-Losanges-Nº40-2018). En él se deben estudiar varios tipos de canalización, en función de las diferentes formas de las secciones que exploren.

b) El teorema de Napoleón. Se trata de un resultado conocido y que se atribuye al emperador Napoleón Bonaparte (también se conoce con el nombre de el Teorema del Emperador) aunque se cree que su autor fue Lorenzo Mascheroni, matemático italiano que logró una aproximación geométrica del número π denominada Aproximación de Mascheroni, que al principio de su carrera se interesó por la poesía y griego. En su libro Geometria del Compasso probó que cualquier construcción geométrica que pueda ser hecha con regla y compás puede ser hecha únicamente con compás, aunque el primero en dar ese resultado (hoy conocido como Teorema de Mohr-Mascheroni) fue el danés Georg Mohr quién publicó una prueba en 1672. La razón por la que ha pasado a la historia con esta atribución parece ser que es la gran afición de Napoleón por las matemáticas y su gran amistad con Mascheroni que le llevaron a estudiar sus libros y a popularizar sus resultados con tanto éxito que, incomprensiblemente, en algún momento se atribuyó este teorema a Napoleón.

a) *Construir una sección de un canal de capacidad máxima que se puede obtener, en planta, a partir de una hoja de zinc rectangular de 21cm de ancho paralelamente a su longitud.*
NOTA: Se indica que los alumnos pueden utilizar una hoja DIN-A4 para comprender la multitud de pliegues posibles.

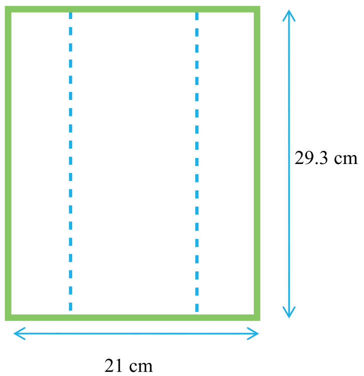

Fig. 14. Placa de Zinc rectangular

b) *Sea un triángulo cualquiera ABC. Si se construyen tres triángulos equiláteros a partir de sus lados, entonces los centros de los triángulos equiláteros es también un triángulo equilátero. (Teorema de Napoleón).*
NOTAS.
b. 1. *Un teorema análogo es cuando los triángulos equiláteros se construyen en el interior de los lados de un triángulo y el denominado triángulo interior de Napoleón también es equilátero.*
b. 2. *Es sorprendente como la diferencia entre las áreas de los triángulos de Napoleón, exterior e interior, es igual al área del triángulo original*

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

En teoría de números Srinivasa Ramanujan (Erode, 22/12/1887- Kumbakonam, 26/04/1920) fue un matemático indio que con una mínima educación académica en matemáticas puras hizo contribuciones extraordinarias en análisis matemático, teoría de números, series y fracciones continuas. Ramanujan desarrolló inicialmente su propia investigación matemática en forma aislada; que fue rápidamente reconocida por los matemáticos indios. Cuando sus habilidades se hicieron evidentes para una comunidad matemática más amplia, centrada en Europa en ese momento, comenzó su famosa colaboración con el matemático británico G.H. Hardy. (Hay que destacar la breve pero intensa colaboración con el joven matemático indio Ramanujan era autodidacta sin formación académica formal, como se ha citado, pero con gran capacidad en la resolución de problemas. Aún sin formación académica, Ramanujan había publicado varios artículos en revistas científicas indias, lo que le hizo adquirir cierto prestigio en la región de Madras (actualmente Chennai), la zona en la que vivía, y que le sirvió para que el matemático Ramachandra Rao (1871-1936) le ayudase a conseguir un trabajo como administrativo en la Autoridad Portuaria de Madras; que le dio tranquilidad para poder dedicarse más activamente a las matemáticas y donde pudo interaccionar con compañeros con formación matemática.

Animado por sus colegas indios, Ramanujan escribió en 1912 a algunos matemáticos europeos a los que envió algunos de sus trabajos y demostraciones matemáticas. No recibió respuesta de ninguno de ellos. Tras leer el libro Orders of Infinity de Hardy (publicado en 1910), Ramanujan escribió a Hardy, que recibió su carta en enero de 1913. En su carta de presentación, Ramanujan hacía notar que no tenía formación formal en matemáticas, por lo que Hardy debió pensar "otro osado que me escribe en busca de ayuda" y su primera intención fue no hacer caso a la solicitud. Sin embargo, algo llamó la atención de Hardy en los escritos que acompañaban las cartas, por lo que empezó a leerlos con calma. Tras consultar con Littlewood, los dos identificaron un gran talento matemático en el joven indio y Hardy le invitó a viajar a Cambridge para completar su formación e investigar. Sin embargo, Ramanujan rechazó la invitación por razones religiosas, era un brahmán ortodoxo y vegetariano estricto; y al que su religión dificultaba viajar. Sin embargo, Eric H. Neville (1889-1961), matemático amigo de Hardy, le convenció durante un viaje a la India. Así, Ramanujan llegó a Cambridge el 30 de abril de 1914, siendo alojado en el Trinity College. El estallido de la I Guerra Mundial facilitó la prolongación de la estancia de Ramanujan en Cambridge donde, de manera independiente y también en colaboración con Hardy, realizó algunas de las aportaciones más sobresalientes en teoría de números del siglo XX. Al acabar la I Guerra mundial, Ramanujan regresó a la India, abandonando Inglaterra el 27 de febrero de 1919, falleciendo el 26 de abril de 1920, tras problemas de salud que le acompañaron durante toda su vida).

https://principia.io/2016/02/07/hardy-teoria-de-numeros-y-descubridor-de ramanujan.
IjIyOCI/

Redescubrió teoremas conocidos previamente, además de formular numerosas nuevas proposiciones. trabajó principalmente encontrando identidades relacionadas con el número π y el número e o los números primos. En general sus fórmulas son muy enrevesadas, pero en su mayoría verdaderas (a posteriori se ha descubierto que algunos de sus resultados eran incorrectos), y muchas de ellas se han convertido en potentes herramientas para calcular grandes cantidades de decimales de, principalmente, el número π. Hizo impresionantes aportaciones a lo que se denomina ***apilamientos infinitos de radicales***

$$\sqrt{a_0 + b_0\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2\sqrt{a_3 + \dots\dots\dots\dots}}}}$$

¡A estos vamos a dedicar la primera joyita!

La segunda la dedicamos a poner en valor de la importancia de los números compuestos. Y aquí los números primos, una vez más, constituyen el basamento sobre los que se construyen todos los números (compuestos).

Por eso no es difícil de intuir que los números primos son importantes. Pero, ¿por qué? ¿Qué tienen de especial? La especial naturaleza de estos números les da una importancia fundamental en matemáticas. Los números enteros compuestos, se pueden expresar como productos de potencias de números primos, a dicha expresión se le llama **descomposición de un número en factores primos**.

a) *Probar que*

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\dots}}}}} = 3$$

b) *Demostrar que un entero natural **n** que es al mismo tiempo el cuadrado **$n=p^2$** y el cubo **$n=q^3$** también **n** es el cuadrado de un cubo.*
*Generalizando: Si **a, b, n, m** son enteros naturales con **$n \wedge m = 1$** y **$a^n = b^m$**. Demostrar que existe un número entero c tal que **$a = c^m$** y **$b = c^n$**.*

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@ gmail.com