Aprendizaje basado en la indagación para la resolución de problemas de Fermi

Jesús Montejo-Gámez
Universidad de Granada, *jmontejo@ugr.es*

Resumen: *Este trabajo presenta una experiencia de aula en la que se aplican las ideas del aprendizaje basado en la indagación para resolver problemas de estimación de grandes cantidades. Para desarrollar la experiencia se diseñó una tarea y un secuencia de pasos que ofrece la cantidad justa de ayuda para abordar la estimación. Estos pasos se diseñaron partiendo de las herramientas didácticas desarrolladas para el proyecto europeo MERIA, que fueron adaptadas para trabajar las competencias de modelización. La experiencia, que fue llevada a cabo con un grupo de 22 estudiantes del grado de primaria, puso de manifiesto fortalezas y debilidades del planteamiento didáctico implementado. Estas se explican y discuten en el manuscrito.*

Palabras clave: *formación inicial de maestros de primaria, proyecto MERIA, modelización matemática, tareas de estimación.*

Inquiry-Based Learning for solving Fermi problems

Abstract: *This paper shows a teaching experience which applies the inquiry-based learning approach to solve large quantity estimation problems. To develop the experience, a task and a sequence of steps were designed to provide just the right amount of help in addressing the estimation. These steps were designed based on some didactic tools developed for the MERIA European project, which were adapted to foster modelling skills. The experience, which was carried out with a group of 22 prospective primary school teachers, revealed strengths and weaknesses of the didactic approach implemented. These are also explained and discussed in the manuscript.*

Key words: *elementary teacher education, MERIA project, mathematical modelling, estimation tasks*.

1. INTRODUCCIÓN

Las normativas curriculares promulgadas durante los últimos años en el ámbito nacional demandan la promoción de aprendizajes basados en el diseño de competencias clave. Con el fin de acercar los diferentes contenidos disciplinares con este enfoque por competencias, la Ley Orgánica por la que se Modifica la Ley Orgánica de Ecuación (LOMLOE) (Jefatura del Estado, 2020) materializa un conjunto de competencias específicas para cada materia. En el caso de las matemáticas, el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022), propone ocho competencias específicas cuyo desarrollo integrado constituye el fin de la educación matemática en esta etapa educativa. El desarrollo de prácticas de enseñanza alineadas con este tipo de aprendizaje competencial supone de por sí un desafío para el profesorado de primaria, desafío que es aún mayor si se atiende a las dificultades del profesorado en formación inicial en competencias matemáticas tales como la resolución de problemas, el razonamiento o la aplicación del contenido matemático en situaciones contextualizadas (véanse Kaasila et al., 2010 o Sáenz, 2009, por ejemplo). Resulta prioritario, por tanto, incluir en la educación matemática de los futuros maestros actividades que estimulen el desarrollo de sus propias competencias matemáticas (López et al., 2020).

Diferentes autores señalan que las tareas de estimación son de utilidad para el desarrollo de estas competencias (Ärlebäck y Albarracín, 2019; Montejo-Gámez et al., 2023). En efecto, la elaboración de un "juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite" (Segovia et al., 1989, p. 18) involucra actividades de relevancia en la formación del profesorado, como son la reflexión sobre el orden de magnitud de las unidades de medida o la necesidad de dar soluciones exactas o aproximadas (Segovia y Castro, 2009). Una familia de tareas de estimación que ha sido especialmente estudiada en educación matemáticas está constituida por los *problemas de Fermi*, que consisten en preguntas abiertas sobre la estimación de cierta cantidad cuya resolución implica el diseño de estrategias personales, la elección de variables y la estimación directa o recogida de datos sobre fenómenos reales (Ärlebäck y Albarracín, 2019). Esto ha llevado a que exista un volumen creciente de estudios que analiza el desempeño de los futuros maestros de primaria al resolver diferentes problemas de Fermi (por ejemplo, Segura, 2022).

La enseñanza de la resolución de problemas de Fermi implica para los formadores de profesorado asumir el desafío de proporcionar una *cantidad justa de ayuda* para los futuros maestros, que alivie los posibles bloqueos derivados del carácter abierto de la pregunta inicial sin simplificar en exceso la estimación a desarrollar. El planteamiento de la enseñanza que se desarrollaron en el marco del proyecto MERIA (2016) proporciona ideas clave en este sentido. Continuando otras iniciativas a nivel europeo como los proyectos PRIMAS (Dorier y García, 2013) o MASCIL (García et al., 2018), el proyecto MERIA (2016) combina los principios de la *Educación matemática realista* (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014), las ideas del *Aprendizaje basado en la indagación* (Maaß y Doorman, 2013) y el planteamiento pedagógico de la *Teoría de situaciones didácticas* (Brousseau, 1997) para generar herramientas didácticas que guíen el aprendizaje de la resolución de problemas de Fermi de los futuros maestros de primaria.

Este es el punto de partida del presente trabajo, cuya estructura se detalla a continuación. En la siguiente subsección se explican las ideas teóricas del proyecto MERIA (2016) que sustentan la propuesta didáctica de la experiencia que se presenta. La sección 2 explica el contexto de la experiencia llevada a cabo, así como la tarea planteada y el diseño de la sesión de trabajo creada para apoyar a los futuros maestros en su resolución. La sección 3 muestra algunos ejemplos del trabajo desarrollado por estos estudiantes y valora la experiencia desarrollada. Finalmente, la sección 4 extrae la conclusión del trabajo.

1.1. Marco teórico. Escenarios del proyecto MERIA

Con el fin de proporcionar la ayuda justa para la resolución de problemas abiertos, el proyecto MERIA (2016) desarrolló dos herramientas básicas: *módulos y escenarios*. Un módulo es la unión de un escenario y el material necesario para implementarlo en el aula. Por su parte, un escenario es una descripción exhaustiva de una sesión de clase en términos de la Teoría de situaciones. En este marco teórico se persigue que los estudiantes construyan conocimiento resolviendo tareas, de manera que la resolución de estas tareas surja como adaptación a un denominado *medio didáctico*. Un medio didáctico consiste en la tarea, el conocimiento previo de los estudiantes y los artefactos necesarios para resolver la tarea (papel, lápiz, calculadora, instrumentos de medida, etc.).

En este contexto, la labor del profesorado es la de diseñar el medio didáctico y la de ayudar a los estudiantes a adaptarse a él. Durante este proceso, aparecen situaciones *adidácticas* y *didácticas*. Las situaciones adidácticas son aquellas en las que los estudiantes están comprometidos con la tarea y exploran el medio sin la interferencia el profesor. Las situaciones didácticas son aquellas en las que los estudiantes y los profesores interactúan. La combinación equilibrada de situaciones didácticas y adidácticas es la que lleva al proceso de indagación y a la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. Por tanto, un escenario adecuado debe contener esta combinación de situaciones a lo largo de diferentes fases.

i) Fase de *devolución*, en la que el profesor introduce la tarea y explica las reglas para resolverla (suele incluir situaciones didácticas).
ii) Fase de *acción*, en la que los estudiantes se involucran en la resolución de la tarea y trabajan activamente en ella (suele incluir situaciones adidaćticas).
iii) Fase de *formulación*, en la que los estudiantes formulan explícitamente (verbalmente o por escrito) los resultados obtenidos en la fase de acción.
iv) Fase de *validación*, en la que los estudiantes comprueban sus hipótesis y estrategias frente al medio (suele incluir situaciones adidácticas).
v) Fase de *institucionalización*, en la que el profesor declara el conocimiento institucional (suele incluir situaciones didácticas). En esta fase, el profesor puede poner ideas en común, comparar puntos de vista y explicar estrategias que se han revelado como óptimas.

Los escenarios de enseñanza del proyecto MERIA (2016) aprovechan estas ideas para organizar los tiempos de las sesiones de trabajo en el aula. En particular, cada escenario contiene la especificación del objetivo de conocimiento para la lección, un conjunto de objetivos más amplios que pueden ser alcanzados durante el desarrollo del escenario (pero que no reciben atención principal), el conocimiento previo que deben tener los estudiantes para aprovechar la sesión, el material necesario para implementar la sesión, el curso y la edad de los estudiantes, la distribución de la sesión en fases (de devolución, de acción, de formulación, de validación y de institucionalización) y la duración de cada una de ellas, la formulación exacta de las tareas planteadas y las conjeturas del profesor sobre las respuestas de los estudiantes a las tareas, preguntas de ampliación relacionadas con la sesión y una lista de las producciones que deben generar los estudiantes al finalizar la lección. Pueden verse plantillas para desarrollar este tipo de escenarios y algunos ejemplos adicionales en MERIA (2016). Estos ejemplos muestran la potencia de los escenarios, que fueron aprovechados para el diseño de la experiencia como se detalla a continuación.

2. CONTEXTO Y PLANTEAMIENTO DE LA EXPERIENCIA

La experiencia fue desarrollada con un grupo de 22 estudiantes del grado de educación primaria de la Universidad de Granada de cuarto curso que habían superado las asignaturas obligatorias relacionadas con matemáticas y su didáctica de dicho grado. Estos estudiantes estaban matriculados en la asignatura “Competencias matemáticas para la educación primaria”, de carácter optativo, que se focaliza en el conocimiento didáctico de los estudiantes sobre la enseñanza de las matemáticas por competencias así como en el desarrollo de sus propias competencias matemáticas. En el marco de esta asignatura, los estudiantes asistieron a una serie de sesiones de resolución de problemas en las que se plantearon tareas de modelización matemática que fueron resueltas durante cada una de las sesiones, en las que se adaptaron las ideas teóricas descritas previamente. Concretamente, se celebraron seis sesiones en las que se abordaron sendas tareas. Este trabajo detalla la experiencia en torno a una de las sesiones, que se focalizó en la resolución de un problema de Fermi. La siguiente subsección especifica el problema y el planteamiento didáctico desarrollado para abordarla.

2.1. Diseño de la sesión de trabajo

El punto de partida de la sesión fue el planteamiento de la tarea "Los seguidores del presidente" (Figura 1), que pide calcular el número de personas que asistieron a la ceremonia de investidura del presidente Barack Obama en vista de una imagen de satélite del evento. Dicha imagen de fue proporcionada a los estudiantes en formato digital escalable para facilitar el desarrollo de sus estimaciones.

Figura 1

Enunciado de la tarea "Los seguidores del presidente".

Barack Obama fue elegido presidente de los Estados Unidos de América en 2009. La asistencia a su ceremonia de investidura fue histórica, y se puede ver en la fotografía.

Proporciona una estimación de la cantidad de personas que asistieron a la ceremonia de investidura de Obama. Explica tu solución.

El planteamiento didáctico desarrollado para resolver la tarea partió de los escenarios desarrollados en el proyecto MERIA (2016). Dada su complejidad y la naturaleza del problema planteado, estos escenarios fueron reducidos dando lugar a los escenarios simplificados que se esquematizan en la Figura 2. La idea fundamental de estos escenarios es la de organizar las acciones del formador y las reacciones de los estudiantes que tienen lugar durante el desarrollo de la sesión en cuatro pasos que combinan las diferentes fases utilizadas en los escenarios del proyecto MERIA (2016). La descripción de estos pasos para esta experiencia de aula se sintetiza a continuación (los detalles acerca del escenario simplificado que se implementó se recoge en el Anexo I).

En el *Paso 1*, el formador enunció la tarea, se aseguró de que los estudiantes la comprendieron y formularon preguntas preliminares para observar las ideas previas de los estudiantes acerca de la dificultad de la tarea y los conocimientos necesarios para resolverla (fase de devolución). A continuación, el formador dejó tiempo para responder estas cuestiones. Durante ese periodo de tiempo, se limitó a escuchar a los futuros maestros, anotar en la pizarra las diferentes ideas que van surgiendo entre el alumnado y seleccionar los equipos cuya aportación era de interés para el resto de la clase (acción para todos los equipos y formulación para los que explicaron sus ideas al formador).

Figura 2

Plantilla para desarrollar un escenario simplificado.

Objetivos principales		
Objetivos secundarios		
Conocimiento previo		
Material necesario		
Paso	**Acciones del profesor**	**Acciones y reacciones de los estudiantes**
Paso 1 (duración)	**Cuestiones preliminares**	
Paso 2 (duración)	**Primera pregunta de guía**	
Paso 3 (duración)	**Segunda pregunta de guía**	
Paso 4 (duración)	**Reflexión sobre los mensaje a institucionalizar (escribir explícitamente aquí)**	
Pregunta de ampliación		
Producciones de los estudiantes		
Observaciones:		

En el *Paso 2*, el formador puso en común las respuestas a las preguntas preliminares (formulación), valoró las ideas surgidas y las conectó con la primera pregunta de guía, centrada en el diseño de una estrategia para resolver la tarea (véase el enunciado específico en el Anexo I). También se aseguró de que los futuros maestros comprendieron esta pregunta (devolución). Concedió un nuevo periodo de tiempo para trabajar en la pregunta, recogiendo las ideas de interés que emergen para anotarlas en la pizarra y seleccionando las contribuciones de potencial interés para el grupo completo (acción para todos los equipos y formulación para los que explicaron sus ideas al formador).

En el *Paso 3*, el formador de profesorado moderó la puesta en común de las ideas de los diferentes equipos, buscando que emergieran las fortalezas y debilidades de cada una de las estrategias proporcionadas por los equipos de trabajo (formulación). Esto llevó a la segunda pregunta de guía, cuyo foco es la implementación de las estrategias surgidas (el enunciado específico se proporciona en el Anexo I). El formador planteó esta segunda pregunta y se aseguró de que todos los futuros maestros la comprendieran (devolución). De nuevo, se deja un periodo de tiempo en el que el rol de los formadores es análogo al desarrollado en los dos pasos anteriores (escucha y selección y anotación de ideas de valor potencial, fases de acción y formulación en algunos casos).

En el *Paso 4*, finalmente, el formador dirigió la puesta en común de los resultados obtenidos en respuesta a la segunda pregunta de guía (formulación), que condujo a una solución “óptima”, consensuada en la medida de lo posible (validación entre iguales). Tras ello, se propuso la reflexión compartida sobre los pasos seguidos en la sesión, las dificultades que los equipos de trabajo encontraron y cómo estos se resolvieron. Además, se hicieron explícitas las ideas clave de la sesión: Por una parte, la importancia de identificar cantidades clave que permiten desarrollar la estimación, y que estas no tienen por qué estar en el enunciado de la tarea. Por otra parte, la necesidad de idear y aplicar estrategias antes de involucrarse en cálculos (institucionalización). La intervención del formador culminó invitando a los futuros maestros a discutir la dificultad de la tarea, y dejando los minutos finales para que estos trabajaran en sus producciones finales y plantearan dudas personalizadas.

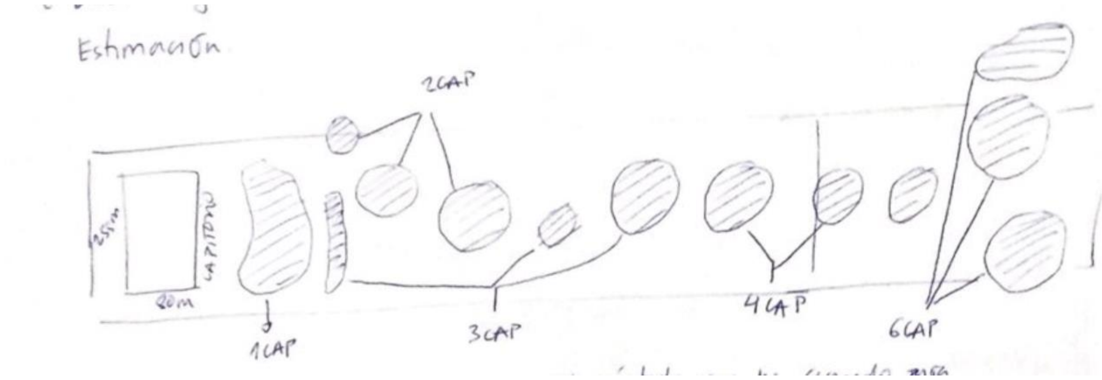
El desarrollo de estos cuatro pasos tuvo lugar en una sesión de 60 minutos, 55 de los cuales fueron de trabajo efectivo: 45 de intercambio de cuestiones y puesta en común de ideas y 10 de trabajo sobre las producciones finales y dudas. Estas 22 producciones, junto con el mismo número de respuestas a un cuestionario cortos sobre el problema de Fermi planteado son las evidencias que se recogieron del desempeño de los futuros maestros durante la sesión.

3. ESTRATEGIAS ENCONTRADAS Y VALORACIÓN DE LA EXPERIENCIA

Durante la sesión emergieron principalmente tres estrategias de resolución del problema de Fermi en respuesta a la primera pregunta de guía planteada. La primera de ellas se basó en localizar una zona particular del dibujo (el área de la planta del Capitolio o el cuadrado unidad de una retícula trazada para cuadricular el área total de la imagen proporcionada), calcular su área y multiplicar por el número de personas que caben en un metro cuadrado, variable para la que se consensuó el valor de 8 como válido. Las estimación proporcionada se obtuvo multiplicando el resultado obtenido por el número de cuadrados ocupados por personas en la imagen de la tarea.

Figura 3

Detalle de una producción que descompone la zona ocupada por personas.

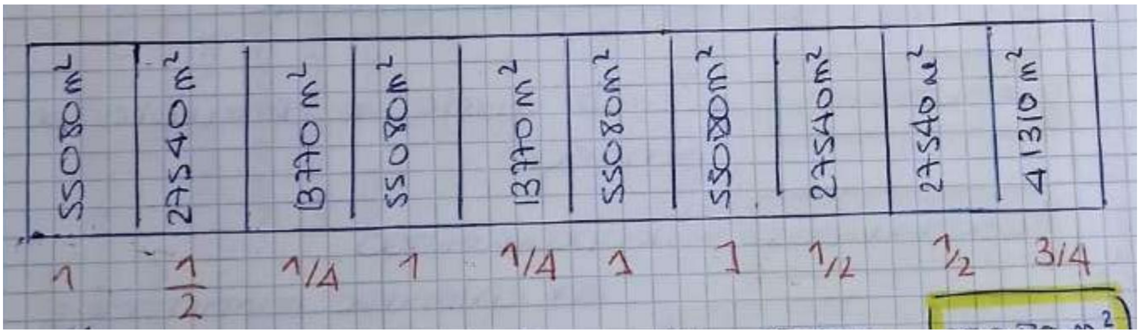


La segunda estrategia observada, que fue la más común, consistió en descomponer la zona ocupada por personas en figuras cuya área se estimó utilizando fórmulas escolares (Figura 3). En la mayoría de los casos, se asumió que las figuras estaban "llenas" de gente y se utilizó el dato de que caben 8 personas en un metro cuadrado, pero se encontró también un futuro maestro que consideró diferentes ratios de ocupación (6, 4 o 2 personas por metro cuadrado) según la figura sobre la que trabajó.

La tercera consistió en dividir la imagen dada por el enunciado de la tarea en diferentes regiones y estimaron la fracción de cada región que estaba ocupada por personas. En la mayoría de estos casos se tomaron diferentes regiones con fracciones distintas (Figura 4), aunque también se encontraron casos en los que se asumió una "fracción de ocupación" global (por ejemplo, uno de los futuros maestros consideró que la zona de la imagen ocupada por personas es un tercio de la misma).

Figura 4

Detalle de una producción que dividió la imagen en regiones y estimó las fracciones de cada región que estaban ocupadas por personas.



En cuanto a la valoración de la experiencia llevada a cabo, se percibió que la estructuración en pasos de la sesión condicionó el trabajo de los futuros maestros que la siguieron en diferentes sentidos. En primer lugar, se encontró que todos estos estudiantes universitarios mantuvieron una actitud positiva, siguieron la sesión y dieron una respuesta elaborada al problema planteado, algo que no sucede en general cuando se plantea problemas abiertos en la educación matemática de los futuros maestros de primaria. Esto indica que la secuenciación en pasos puede contribuir a estimular el compromiso de estos estudiantes universitarios con la resolución de problemas complejos y evitar los eventuales bloqueos y respuestas en blanco que pueden emerger en la resolución de este tipo de tareas. En segundo lugar, se percibió que los periodos de puesta en común y debate ayudaron a reducir errores (de elección de variables y estrategias, así como de cálculo), lo que llevó también a respuestas homogéneas y estimaciones de bastante precisión. Estos periodos de puesta en común, por el contrario, condujeron a situaciones menos deseables. Una de ellas es que el formador tuvo dificultades para que el grupo completo siguiera los debates, ya que cada maestro en formación quería seguir sus propias ideas y en pocas ocasiones valoraban las de sus compañeros. Otra debilidad de la experiencia es que se ha identificado una riqueza de ideas menor que la documentad por la investigación para la misma tarea en muestras similares (véase el estudio de Montejo-Gámez et al., 2023). De hecho, la totalidad de las estrategias encontradas aplica la idea de Densidad identificada por Segura (2022) para una generalidad de problemas de Fermi. Esta situación es natural debido a que los debates desarrollados en las puestas en común condujeron a la confluencia de ideas entre diferentes compañeros.

Respecto al uso de preguntas guía y la previsión sobre las respuestas de los estudiantes estipuladas en los escenarios simplificados, se ha observado que el seguimiento de los mismos resultó complejo para el formador de profesorado, ya que en ocasiones tuvo que imponer ideas para que el planteamiento de las preguntas guía emergiera del desarrollo de la sesión. Esto podría no ser posible en escenarios planteados para otras tareas en las que el formador no tenga experiencia, ya que el pensamiento de los futuros maestros que atiendan la sesión podría no corresponderse con la expectativa planteada en el escenario simplificado. Esta idea incide en la sensación del formador de que el empleo de los escenarios podría resultar contraproducente, ya que se trata de una herramienta compleja que puede inducir confusión entre los futuros maestros para resolver problemas como el abordado en la experiencia de aula desarrollada. Se plantea entonces el interés de desarrollar experiencias con otras tareas de modelización que supongan mayor dificultad. El Anexo II recoge un ejemplo de escenario simplificado para la tarea de modelización "El Faro" (Blum y Borromeo, 2009), que ilustra el potencial de esta herramienta didáctica para resolver una de estas tareas de mayor dificultad.

4. CONCLUSIÓN

Este artículo presenta y valora el desarrollo e implementación de una experiencia de aula en la que se trabajó la resolución de problemas de Fermi a partir de estrategias de aprendizaje basado en la indagación (Maaß y Doorman, 2013). Para ello, se adaptaron los escenarios del proyecto MERIA (2016), que fueron diseñados para el aprendizaje de contenido matemático escolar, pero que aquí han sido utilizados para el desarrollo de competencias de modelización. Este hecho es novedoso y constituye el principal interés didáctico de la propuesta didáctica y del trabajo.

La experiencia llevada a cabo puso de manifiesto algunas ventajas potenciales de esta aproximación didáctica, como son el estímulo del compromiso con la resolución de problemas abiertos por parte de un estudiantado que suele tener dificultades en este tipo de aprendizaje matemático (Kaasila et al., 2010; Sáenz, 2009), así como su buen desempeño en este tipo de problemas. También se han observado puntos débiles, como la posible pérdida de ideas que emerge de la compartición de soluciones en gran grupo o la complejidad del diseño de las sesiones de trabajo, que puede resultar contraproducente en algunas ocasiones. En cualquier caso, la implementación en el aula de los escenarios simplificados que se diseñaron dejó patente los beneficios de dar *una cantidad justa de ayuda* para resolver problemas de Fermi. De esta manera, se puede afirmar que las ideas utilizadas suponen una contribución de valor a las prácticas de enseñanza de las matemáticas por competencias, por lo que el balance de la experiencia se puede considerar positivo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ärlebäck, J. B. y Albarracín, L. (2019). An extension of the MAD framework and its possible implication for research. En U. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of CERME11* (pp. 1128-1135). Freudenthal Institute y ERME.

Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L. y García, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM, 6*(45), 837-849. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0512-8

García, F. J., Romero, R., Abril, A. M. y Quesada, A. (2018). Proyecto europeo "matemáticas y ciencias para la vida". *Alambique, 92*, 77-79.

Jefatura del Estado (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, núm 340*, 122868.

Kaasila, R., Pehkonen, E. y Hellinen, A. (2010). Finnish pre-service teachers' and upper secondary students' understanding on division and reasoning strategies used. *Educational Studies in Mathematics, 3*(73), 247-261. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9213-1

López, M., Albarracín, L., Ferrando, I., Montejo-Gámez, J., Ramos, P., Serradó, A., Thibaut, E. y Mallavibarrena, R. (2020). La educación matemática en las enseñanzas obligatorias y el Bachillerato. En D. Martín de Diego, T. Chacón, G. Curbera, F. Marcellán y M. Siles (Coords.), *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 1-94). Centro de Estudios Ramón Areces.

Maaß, K. y Doorman, L. M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based learning. *ZDM*, *6*(45), 887-889. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0505-7

MERIA (2016). MERIA project: Mathematics Education Relevant, Interesting and Applicable. https://meria-project.math.hr/

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, núm 52*.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Martínez-Jiménez, E. y Adamuz-Povedano, N. (2023). Análisis de modelos para la estimación de cantidades irregularmente distribuidas. En Jiménez-Gestal, C., Magreñán, Á. A., Badillo, E. e Ivars, P. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 387-394). SEIEM.

Sáenz, C. (2009). The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (pisa). *Educational Studies in Mathematics, 71*(2), 123-143. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9167-8

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Síntesis.

Segovia, I. y Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(7), 499-536.

Segura, C. (2022). *Flexibilidad y rendimiento en la resolución de problemas de estimación en contexto real. Un estudio con futuros maestros* [Tesis doctoral]. Universidad de Valencia, Valencia, España.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 521-525). Springer.

Anexo I. Escenario simplificado de la tarea planteada en la sesión

Ejemplo 2 (Seguidores del presidente) Barack Obama fue elegido presidente de los Estados Unidos de América en 2009. La asistencia a su ceremonia de investidura fue histórica, y se puede ver en la fotografía de debajo.

Proporciona una estimación de la cantidad de personas que asistieron a la ceremonia de investidura de Obama. Explica tu solución.

Escenario simplificado de la tarea

Objetivos principales	i) Identificar y asignar variables y parámetros: identificar aquellas cantidades que son relevantes para estimar la asistencia. Definirlas y darles un nombre. ii) Diseñar estrategias para resolver problemas: proporcionar un conjunto de pasos que llevan a una estimación de la asistencia sin necesidad de conocer datos concretos. iii) Obtener información y estimar datos: obtener de forma autónoma valores realistas pare el área que ocupa una persona o relaciones entre áreas en metros cuadrados y la cantidad de personas que ocupan esas áreas.	
Objetivos secundarios	a) Aplicar procedimientos matemáticos: calcular áreas y usar fracciones. Manipular expresiones algebraicas que describan una estrategia de cálculo)(dependiendo de la estrategia y del estudiante). b) Introducir lenguaje formal (dependiendo de la estrategia y del estudiante): anotar una expresión algebraica que describe la estrategia de cálculo. c) Evaluar la utilidad del modelo: comparar los resultados obtenidos con los resultados de los compañeros y con información tomada de internet. d) Explicar el modelo: escribir un informe que detalle la estrategia de estimación y los cálculos y el razonamiento involucrado en las estimaciones hechas.	
Conocimientos previos	Fracciones, áreas y medida. El conocimiento sobre escalas también puede ser útil.	
Material necesario	Acceso a internet para buscar las medidas del parque del Capitolio. Instrumentos de medida para estimar el área ocupada por una persona.	
Paso	**Acciones del profesorado**	**Acciones de los estudiantes y reacciones a las acciones del profesorado.**
Paso 1 (5')	**Cuestiones preliminares.** ¿Es esta tarea muy difícil para vosotros? ¿Por qué? ¿Qué datos o información previa necesitáis?	- Es muy difícil: no sabemos cómo empezar. - El número de personas que cabe en cada zona del parque y la proporción de área que está ocupada por gente. - Las dimensiones del parque. - El área que ocupa una persona.
Paso 2 (10')	**Primera cuestión de guía.** Anotad una estrategia (conjunto de pasos a seguir) para contabilizar la asistencia si conocieras todos los datos necesarios.	A) Conociendo el área que ocupa una persona y las áreas de cada zona del parque y las fracciones de cada una ocupadas por personas: A1) Dividir el área de cada zona del parque entre el área ocupada por una persona para saber el número de personas que caben cada zona (si estuviera llena). A2) Multiplicar por la fracción de esa zona que está ocupada para saber el número de personas que hay.

		A3) Sumar los resultados para obtener la asistencia total. Esta estrategia se podría seguir en el parque entero, pero previamente habría que estimar la fracción de parque que estaba ocupada. B) Sabiendo el área ocupada por una persona y las áreas ocupadas por personas en cada zona del parque B1) Divide el área ocupada por gente entre el área ocupada por una persona para saber la asistencia en esa zona. B2) Sumar los resultados para obtener la asistencia total. Se puede seguir esta estrategia en el orden contrario (primero sumar las áreas y dividir después).
Paso 3 (15')	**Segunda cuestión de guía.** Estimad todos los datos que necesitáis para seguir vuestras estrategias (¿dónde fue tomada la foto?) y dad vuestra estimación de la asistencia a la investidura de Obama. Explica tus estimaciones, siendo todo lo preciso que puedas.	1) Para estimar el área ocupada por una persona: 1a) Calcular la densidad: contar la gente que cabe en una superficie de área conocida y dividir entre este área. 1b) Medir una persona y aproximar su área. 1c) Buscarlo en internet 2) Para estimar el área de cada zona del parque: estimar sus dimensiones (buscando en google o usando una escala) y aplicar fórmulas adecuadas. 3) Para estimar las fracciones ocupadas por la gente en cada parte: estimación directa o global, compensando densidades de diferentes zonas. 4) Para estimar el área ocupada por la gente en cada zona: multiplicar el área total de la zona por la fracción ocupada por gente.
Paso 4 (15')	**Ideas clave** i) Importancia de saber qué cantidades son realmente necesarias para hacer la estimación. *Para abordar una situación abierta, debemos centrar la atención en la pregunta a resolver, preocuparnos por las cantidades que hay que conocer para dar una respuesta y definir con precisión y dar un nombre a cada una de estas cantidades. <u>No debe importarnos si no conocemos sus valores exactos.</u>* ii) Necesidad de definir y seguir una estrategia. *A la hora de enfrentarse a una pregunta abierta, es buena idea definir con precisión los cálculos que hay que hacer antes de hacerlos. Esto evita utilizar datos innecesarios, hacer cálculos inútiles y además ayuda a centrarse en el problema a resolver, y no prestar atención a detalles irrelevantes. Una estrategia bien definida también contribuye a controlar el proceso de cálculo y detectar errores.* iii) Importancia de obtener información más allá de la que da el enunciado. *Cuando resolver la tarea requiere utilizar información de la que no disponemos, debemos aproximar esta información (calcularla, estimarla, buscarla en internet, etc). Debemos ser tan precisos y cercanos a la realidad como podamos. Es también recomendable que anotemos la fuente (o el cálculo/razonamiento) de donde obtenemos la información utilizada.*	
Preguntas de ampliación		
Producciones de los estudiantes	Informe completo e individual sobre cómo responder a la pregunta inicial y cuestionario online individual con tres preguntas de respuesta corta (250 caracteres cada una). Las preguntas son: 1) Haz una lista con los datos que necesitaste para dar tu estimación y da un esquema breve de la estrategia que empleaste para resolver esta tarea. 2) Explica brevemente cómo obtuviste cada uno de los datos que necesitabas para dar tu estimación. 3) De acuerdo a tus cálculos, ¿cuánta gente asistió a la investidura de Barack Obama? ¿Es tu estimación similar a las de tus compañeros o a las que has encontrado en internet? ¿Por qué?	

Anexo II. Escenario simplificado para la tarea "El Faro" (adaptada de Blum y Borromeo, 2009)

Ejemplo 1 (El faro, adaptada de Blum & Borromeo-Ferri, 2009). El faro de Cabo Mayor está situado al Norte de Santander, muy cerca de la playa del Sardinero, en un lugar abierto al Mar Cantábrico. Este faro está (da luz) a 91 m sobre el nivel del mar, que es de gran utilidad para avisar a los barcos de la cercanía de la costa.

Cuando un barco empieza a divisar la luz del faro sobre el horizonte ¿a qué distancia de la costa se encuentra?

Escenario simplificado de la tarea

Objetivos principales	i) Dibujar la situación: hacer un esquema del faro y del barco en el que la Tierra se representara como un círculo y que permita visualizar la situación. ii) Usar y formular hipótesis: aprovechar la curvatura de la Tierra para utilizar las propiedades del círculo y el Teorema de Pitágoras iii) Aplicar ideas matemáticas en otros contextos: usar que 1) en el momento en que el barco empieza a divisar el faro, la línea de visión entre ambos es tangente a la superficie terrestre, 2) observar que esta línea es perpendicular al radio de la Tierra en ese punto de horizonte y, por tanto, 3) aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular distancias.	
Objetivos secundarios	a) Identificar y asignar variables y parámetros: identificar, en el esquema dibujado, las distancias conocidas y desconocidas que forman parte del modelo. b) Aplicar procedimientos matemáticos: aplicar el Teorema de Pitágoras, hacer cálculos que involucran raíces cuadradas y usar unidades de medida apropiadas para trabajar simultáneamente en diferentes escalas (91 m frente a 6370 Km). c) Analizar la verosimilitud del modelo: evaluar si el orden de magnitud de la solución obtenida es plausible. d) Explicar el modelo: escribir un informe que detalla la solución obtenida: explicar la importancia de la curvatura de la Tierra, proporcionar el esquema hecho y los cálculos desarrollados.	
Conocimientos previos	Teorema de Pitágoras, propiedades del círculo.	
Material necesario	Acceso a internet para buscar los datos reales necesarios (radio de la Tierra y la solución de la tarea, para validarla)	
Paso	**Acciones del profesorado**	**Acciones de los estudiantes y reacciones ante las acciones del profesorado**
Paso 1 (5')	**Questiones preliminares.** ¿Cómo abordaríais la situación? ¿Es esta tarea muy difícil para vosotros? ¿Por qué? ¿Qué información o datos previos necesitáis? ¿Cuánto esperáis que sea aproximadamente la distancia que se pide?	- Estrategias básicas: un triángulo rectángulo (Tierra plana y rayos de luz que caen formando cierto ángulo). - Dificultad alta: no saben cómo empezar - Datos necesarios: la altura del barco, ángulo con el que la luz incide, existencia o no de oleaje o de nubes. - Expectativas sobre la solución dispersas: estimaciones de pocos metros y de muchos kilómetros.

Paso 2 (10')	**Primera cuestión de guía.** Un día soleado, hay un momento donde el barco puede ver la torre del faro, pero no puede ver la casa. Haz un dibujo que explique esta situación, usando unidades de medida adecuadas.	- Desacuerdo: hay alumnos que piensan que si el barco ve la torre, entonces también ve la casa. - No entienden cómo puede ocurrir la situación descrita - Surge la idea de considerar la curvatura de la Tierra.
Paso 3 (15')	**Segunda cuestión de guía.** Ahora, pensad en el momento en el que el barco divisa el faro por primera vez. Utiliza las ideas que se han discutido para estimar la distancia del barco a la costa y compara tu resultado con tu primera estimación y con resultados que encuentres en internet.	- La altura del barco es un dato a tener en cuenta - La línea de visión barco-faro es tangente a la superficie terrestre - Algunos alumnos observan que esta línea es perpendicular al radio terrestre. - El Teorema de Pitágoras es útil en este caso. - El radio de la Tierra se puede buscar en internet.
Paso 4 (15')	**Ideas clave** i) La importancia de representar una situación geométrica presentada en contexto. *Hacer un esquema de la situación facilita centrarse en la cuestión a resolver en situaciones geométricas. En este caso, permitió identificar los datos y descubrir la clave de la tarea: hay que usar la curvatura terrestre.* ii) La importancia de las hipótesis. *Todos sabíamos que la superficie de la Tierra se curva, pero en un primer intento es usual ignorar este hecho. Cuando se trabaja con situaciones reales, debemos seleccionar qué características de la realidad son relevantes para responder a nuestra pregunta. Debemos encontrar aquellos elementos que facilitan la aplicación de ideas matemáticas, pero no podemos simplificar excesivamente ya que nuestra solución debe ser útil.* iii) El conocimiento sobre las propiedades del círculo que se aplicaron. *El Teorema de Pitágoras es aplicable porque la línea recta entre el faro y el barco es tangente a la Tierra y por tanto es perpendicular al radio.*	
Preguntas de ampliación	Una fórmula general de la distancia entre cualquier barco y cualquier faro; La diferencia entre “distancia en línea recta” y distancia sobre la superficie.	
Producciones de los estudiantes	Informe completo e individual en el que se da respuesta a la pregunta inicial y cuestionario online individual con tres preguntas cortas (250 caracteres cada una). Las preguntas son: 1) ¿Por qué es necesario tomar en consideración el radio de la Tierra para resolver esta tarea? 2) ¿Por qué se puede aplicar el Teorema de Pitágoras? 3) ¿A qué distancia, aproximadamente, está el barco de la costa la primera vez que divisa el faro?	