Épsilon - Revista de Educación Matemática 2014, Vol. 31(3), nº 88, 71-88

La extracción de raíces en el *Tratado de Mathematicas* (1573) del bachiller Juan Pérez de Moya

Vicente Meavilla Seguí
Licenciado en Matemáticas, Doctor en Filosofía (Pedagogía)
vmeavill@hotmail.com
Antonio M. Oller Marcén
Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza
oller@unizar.es

RESUMEN: *Si se atiende al número de ediciones de algunas de sus obras y al volumen de su producción, no cabe duda de que el bachiller Juan Pérez de Moya es el matemático español más notable del siglo XVI. En este artículo se analizan los contenidos concernientes al tópico «extracción de raíces» propuestos por el bachiller en el Tratado de Mathematicas (1573) y se comparan con los que se desarrollan en textos de la misma época. A la luz de esta comparación, se pretende situar al matemático jienense (en cuanto al estudio de las raíces de números naturales se refiere) en el lugar que le corresponde dentro de la Matemática renacentista.*
Palabras *clave: Juan Pérez de Moya; siglo XVI; extracción de raíces; Aritmética; Tratado de Mathematicas.*

The extraction of roots in the *Tratado de Mathematicas* (1573) of the bachelor Juan Pérez de Moya

ABSTRACT: *According to the number of editions of some of his works and to the volume of its production it is clear that the Bachelor Juan Pérez de Moya is the most outstanding Spanish mathematician of the sixteenth century. In this paper we analyze the contents concerning the topic «extraction of roots» (Tratado de Mathematicas, 1573) and we compare them with those developed in texts from the same period of time. In*

light of this comparison, it is expected to place the Spanish mathematician (as for the study of the roots of natural numbers is concerned) in his right place within Renaissance Mathematics.
Keywords: *Juan Pérez de Moya; Sixteenth century; extraction of roots; Arithmetic; Tratado de Mathematicas.*

1. INTRODUCCIÓN

Los datos biográficos sobre el bachiller Juan Pérez de Moya son escasos e inciertos (Meavilla, 2005). Nació antes del 1513, probablemente en 1512, en Santisteban del Puerto (Jaén), tal como se indica en la portada de algunos de sus libros. Estudió en Salamanca y Alcalá de Henares. En 1536 obtuvo una capellanía en su pueblo natal y, ya muy mayor, fue canónigo de la Catedral de Granada, ciudad en la que murió allá por el 1596.

Además de algunas obras de carácter religioso y mitológico, el bachiller escribió varios libros de contenido científico-matemático en los que procuró divulgar los conocimientos de su época utilizando un lenguaje cercano, claro, preciso y compresible. La temática de dichos textos transita desde los «libros de cuentas» hasta el álgebra simbólica («regla de la cosa»), pasando por la aritmética, geometría, filosofía natural, navegación, geografía, astronomía y cosmografía.

A continuación enumeramos sus obras de contenido científico:

1) *Libro de cuenta, que trata de las quatro Reglas generales de Arithmetica practica, por numerosos enteros y quebrados y de reducciones de monedas destos Reynos de Castilla, con un razonamiento sobre la misma facultad*. Toledo, Juan Ferrer,1554.
2) *Libro Segundo de Arithmetica, Que trata de proporcion, y regla de tres, y monedas, pesos antiguos, con otras cosas tocantes al arte menor y mayor*. Salamanca, Iuan Canoua, 1557.
3) *Compendio de la regla de la cosa, o arte mayor*. Burgos, Martin de Bitoria, 1558.
4) *Arithmetica practica, y specvlatiua*. Salamanca, Mathias Gast, 1562[1].
5) *Arte de marear*[2], 1564.
6) *Obra intitvlada fragmentos mathematicos. En que se tratan cosas de Geometria, y Astronomia, y Geographia, y Philosophia natural, y Sphera, y Astrolabio, y Nauegacion, y Reloxes*. Salamanca, Iuan de Canoua, 1568.

1. Rodríguez Vidal (1987, pp. 10-11), refiriéndose al número de ediciones de la *Arithmetica practica, y specvlatiua*, afirma:

> «Es claro que cuando un libro ha tenido durante más de doscientos años sucesivas ediciones para utilizarlo como texto, no puede ser un libro indiferente a ningún estudioso de la historia de nuestra cultura. Este es el caso singular que ocurre con la *Arithmetica practica, y specvlatiua* del Bachiller Pérez de Moya».

2. Sobre este manuscrito de la Real Biblioteca del Monasterio de San Lorenzo de El Escorial, J. A. Sánchez Pérez (1929) afirma:

> «Son unos apuntes, no completos, atribuidos a Pérez de Moya, escritos en 1564. Parecen la preparación de una obra que no terminó».

7) *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural. Con otras varias materias, necessarias a todas artes Liberales y Mechanicas*. Alcalá, Iuan Gracian, 1573.
8) *Tratado de Geometria Practica, y Speculatiua*. Alcalá, Ivan Gracian, 1573.
9) *Tratado de cosas de Astronomia,y Cosmographia, y Philosophia Natural*. Alcalá, Ivan Gracian, 1573.
10) *Arithmetica de Moya, intitvlada manual de contadores. En que se pone en suma lo que vn contador ha menester saber, y vn orden para los que no saben escreuir, con oyrlo leer, sepan contar, y conuertir de memoria vnas monedas en otras. Co(n) vnas tablas al fin en Guarismo, y Castellano para aueriguar con facilidad las cue(n)tas de los reditos de los ce(n)sos, y juros, segu(n) vsança de España, y otros reynos*. Alcalá, Iuan Gracian, 1582.
11) *Principios de Geometria, de que se pod(r)an aprouechar los estudiosos de artes liberales, y todo hombre que su officio le necessitare a tomar la regla y co(m)pas en la mano. Con el orden de medir, y diuidir tierras.* Madrid, Francisco Sanchez, 1584.

2. EL TRATADO DE MATHEMATICAS

Al referirse al *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural*, Picatoste (1891) se expresa en los siguientes términos:

> *«Esta obra suele estar encuadernada en dos o tres tomos con distinta portada,* dedicatoria y prólogos, por lo cual se consideran como obras distintas y de esta manera las vamos a examinar.»

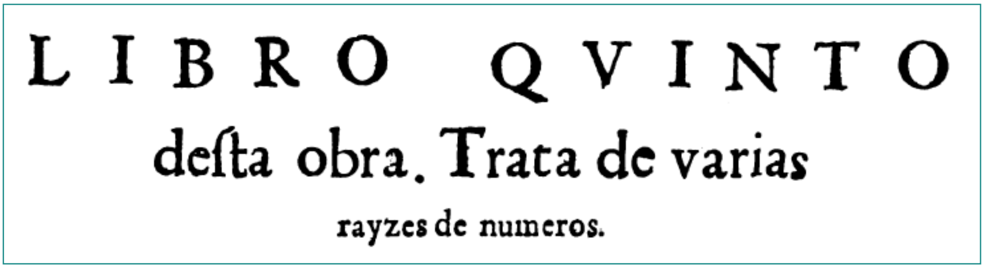
El primer tomo se consagra a la Aritmética[3], se desarrolla en setecientas cincuenta y dos páginas y se estructura en diez libros[4]. El libro quinto (pp. 323 – 396), al que

3. Como indica el título, el tomo segundo se dedica a la Geometría y el tercero se ocupa de la Astronomía, Cosmografía y Filosofía natural.

4. Los tópicos matemáticos a los que se consagra cada uno de ellos se indican al comienzo de la obra:

«**Lo** que se contiene en el primero tratado de Arithmetica
- I) **Arithmetica,** y Musica Speculatiua.
- II) **Las** reglas, o Problemas generales del Arithmetica Practica.
- III) **Quebrados,** o Fracciones Comunes, y Astronomicas.
- IV) **Reglas** de tres, y compañias, y falsas posiciones, y finezas de Oro, y Plata, y reglas de testamentos, y aprecios de joyas, &c.
- V) **Rayzes** de numeros.
- VI) **Prueuas** de las Problemas, o reglas generales de Arithmetica.
- VII) **Reglas** de Algebra, o de la Cosa, o arte mayor.
- VIII) **Demandas,** o questiones, y secretos, o experiencias de numeros.
- IX) **Cuentas** de memoria, para los que no saben escreuir, y reduziones de vnas monedas en otras.
- X) **Monedas,** y pesos antiguos, y characteres de numeros, y cosas de Reportorios de tiempo, y Computo.»

dedicaremos nuestra atención en los parágrafos siguientes, trata de las raíces de números y se divide en doce capítulos[5].


LIBRO QVINTO

deſta obra. Trata de varias

rayzes de numeros.

Fig. 1. Título del libro quinto.

3. LAS FUENTES DEL LIBRO QUINTO

Antes de entrar en el análisis de los contenidos matemáticos del libro quinto, nos parece oportuno presentar el catálogo de autores y obras citadas por Pérez de Moya al referirse a determinados asuntos de carácter aritmético y geométrico. En la tabla siguiente se recogen los autores citados por Pérez de Moya junto con la página en la que lo hace. También se incluye la obra en la que, posiblemente, se apoyó para realizar la referencia.

Autor	Obra	Páginas en que se cita
Ptolomeo	*Almagesto*	328
Euclides	*Elementos de Geometría*	334, 338, 339, 341
Oroncio Fineo	*Protomathesis* *Arithmetica practica, libri quatuor*	334, 335
Nicolas Tartaglia	*General trattato di numeri, et misure*	334, 335, 395
Michael Stifel	*Arithmetica integra*	395

5. Los asuntos tratados en cada uno de ellos se detallan en el «Summario de los capitulos, y articulos que se contienen en el quinto libro desta obra que trata de rayzes de numeros» (pp. 323 – 325):

«Capitulo primero. En que se dize que cosa son rayzes en los numeros, y de varias differencias de rayzes.
Cap. 2. Trata de la rayz quadrada, tiene nueue articulos.
Capit. 3. Trata de numero Cubo, o Cubico, y de su rayz Cubica, tiene onze articulos.
Cap. 4. Trata de rayz quadrada, de rayz quadrada, tiene ocho articulos.
Capitulo 5. Trata de rayz relata, tiene seys articulos.
Cap. 6. Trata de rayz censicubica, tiene ocho articulos.
Capitulo 7. Trata de segundo relato, y de su rayz segunda relata, tiene seys articulos.
Capitulo 8. Trata del censo, de censo, de censo, y de su rayz, tiene seys articulos.
Capit. 9. Trata de numero Cubo de Cubo, tiene seys articulos.
Cap. 10. Trata de censo relato, y de su rayz, tiene seys articulos.
Capit. 11. Trata del numero tercero relato, tiene seys articulos.
Capit. 12. Muestra sacar rayz quadrada, y cubica, y las demás, de fraciones Astronomicas.»

A continuación analizamos con algo más de detenimiento estas referencias.

1) Ptlomeo.
La única cita relativa a Ptolomeo (*Almagesto*, libro I, cap. 9) se encuentra en la página 328 y se refiere a la utilidad de las raíces en el campo de la Geometría y Cosmografía.

2) Euclides.
En la página 334 del libro quinto, al hablar de la extracción de la raíz cuadrada de números naturales, Pérez de Moya cita a Euclides y hace alusión a la cuarta proposición del libro segundo de los *Elementos*:

> «Si se divide de un modo cualquiera una recta por un punto, el cuadrado de la recta entera equivale a los cuadrados de las partes más el doble del rectángulo comprendido por las partes.»

En la página 338 encontramos dos citas más. La primera, que concierne al resto de la raíz cuadrada, no señala la proposición de los *Elementos* involucrada en el asunto. La segunda, relativa a la extracción geométrica de la raíz cuadrada, alude a la novena proposición del libro sexto de Euclides:

> «Construir una media proporcional entre dos rectas dadas.»

En la página 339 también contabilizamos dos notas relacionadas con cuestiones geométricas utilizadas para la demostración de la proposición 9 del libro VI. La primera hace referencia al corolario de la octava proposición del libro sexto de los *Elementos*:

> «En un triángulo rectángulo la perpendicular trazada desde el vértice del ángulo recto a la base es media proporcional entre los segmentos de la base.»

La segunda se refiere a la penúltima proposición del libro sexto de Euclides:

> «En los triángulos rectángulos el cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que forman ese ángulo recto.»

En la página 341, al hablar de la semejanza de números sólidos, el bachiller santistebeño aconseja la lectura de la proposición vigesimoquinta del libro octavo de los *Elementos*:

> «Los números sólidos semejantes tienen entre sí la misma razón que dos números cubos.»

Atendiendo a la numeración de las proposiciones mencionadas, podemos sospechar que Pérez de Moya consultó la obra: *Evclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum Geometricorum. Lib. XV. Cum expositione Theonis in prioris XIII a Bartholomaeo Veneto latinitate donate, Campani in omnes, & Hypsiclis Alexandrini in duos postremos* (1537).

3) Oroncio Fineo.
En las páginas 334 y 335, al hablar de las aproximaciones de la raíz cuadrada de números sordos, el canónigo de la Catedral de Granada se refiere a Oroncio Fineo pero no indica la fuente documental. Pérez de Moya debió consultar los capítulos

consagrados a la extracción de la raíz cuadrada en la *Protomathesis* (1532)[6] o en alguna edición de la *Arithmetica practica, libri quatuor* (1542, 1544, 1555)[7].

4) Nicolo Tartaglia.
En las páginas 334 y 335 se alude a Tartaglia en relación a las aproximaciones de las raíces cuadradas. Dado que no se indican los textos consultados y teniendo en cuenta que el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure* (1556-1560) se dedica íntegramente a la extracción de raíces, sospechamos que Pérez de Moya debió examinar esta obra.
Por otro lado, en la página 395, el bachiller aconseja la lectura de Tartaglia en lo que se refiere a la extracción de la raíz tercera relata (raíz de índice once) de entero y quebrado.

5) Michael Stifel.
La única mención referente a Michael Stifel se encuentra en la página 395 y alude a la extracción de la raíz tercera relata de entero y quebrado. Como en otras ocasiones, Pérez de Moya oculta el texto consultado. En este caso, creemos que se trata de la *Arithmetica integra* (1544)[8].

4. LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES DE NÚMEROS NATURALES

El capítulo I del libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*, apoyándose en las nociones de número cuadrado, cubo, censo de censo, y relato, declara los conceptos de raíz cuadrada, cúbica, cuadrada de cuadrada (cuarta) y relata (quinta). Llegando a este punto, Pérez de Moya comenta:

> «Segu(n) esto infinitas differencias ay de rayzes segu(n) el orden q(u)e vno le paresciere de multiplicar a los numeros muchas, o pocas vezes.»

También se consideran los números prónicos[9], las raíces prónicas[10] y las raíces compuestas (ligadas[11] y universales[12]).

6. La extracción de la raíz cuadrada de números naturales se estudia en la parte consagrada a la Aritmética Práctica (*Liber primus, cap. VII. De inuentione radicis quadratorum numerorum*).

7. En la edición de 1555 que hemos consultado, la extracción de la raíz cuadrada de números naturales se estudia en el capítulo 7 (*De inuentione quadratae radicis in numerus integris*) del libro primero.

8. La extracción de raíces se contempla en el capítulo 5 (*De extractionibus radicum*) del primer libro.

9. Utilizando el simbolismo moderno, un número prónico según Pérez de Moya es del tipo , donde a es un cuadrado perfecto. Así, $18 = 4^2 + \sqrt{4}$ es prónico.

10. Dado un número prónico $a^2 + \sqrt{a}$, su raíz prónica es a. Así, 4 es la raíz prónica de 18.

Encontramos el concepto de raíz prónica en la *Suma de Arithmetica pratica y de todas mercaderias con la horden de contadores* (1546) de Gaspar de Texeda.

11. En notación simbólica moderna algunos ejemplos de raíces ligadas propuestos por Pérez de Moya son:

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} = 3 \quad , \quad \sqrt{9} + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$$

12. En notación simbólica moderna algunos ejemplos de raíces universales propuestos por Pérez de Moya son:

$$\sqrt{13 + \sqrt{144}} = \sqrt{13 + 12} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} + \sqrt{10 + \sqrt{36}} = 7$$

A la hora de justificar la utilidad de las raíces, el bachiller se expresa en los siguientes términos (p. 328):

> «Destas rayzes q(ue) se ha dicho, la quadrada sirue para Geometria, y Cosmographia, y para el arte militar, y para sacar vn medio proporcional entre dos estremos, y para el arte mayor. La cubica sirue para sacar dos medios proporcionales entre dos estremos, y para sacar la quantidad de los Diametros en los cuerpos solidos, y para otras varias cosas. Y esta, con todas las demas que aqui tratamos generalmente, siruen para la regla de la cosa, o arte mayor, como en el proceso desta obra se vera.»

En los diez capítulos siguientes el discurso de Pérez de Moya, en lo que a la extracción de raíces de números naturales se refiere, transita por las siguientes etapas:

- Definición-descripción de potencias y raíces.
- Tablas de potencias de números dígitos: caracteres de exclusión.
- Algoritmos para la extracción de raíces.
- Aproximaciones de raíces.
- Pruebas de las raíces.

En lo que sigue, utilizaremos este guión para el análisis de los contenidos matemáticos.

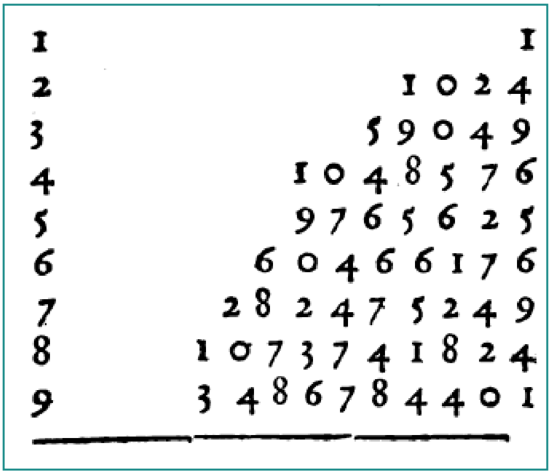
4.1. Definición-descripción de potencias y raíces

Apoyándose en la descripción de las potencias de base natural y exponentes entre 2 y 11, Moya introduce la noción de raíz cuadrada, cúbica, etc. Así, por ejemplo, en el caso de la raíz quinta [= *raíz relata*] el bachiller comenta (p. 356):

> «La quarta especie de rayz en orden, es la que dizen relata, y assi por numero relato se entie(n)de el vltimo producto que sale de la multiplicacion de cinco numeros yguales en quantidad, y genero, assi como estos 2. 2. 2. 2. 2. (o otros mayores) los quales, multiplicados todos, vnos por otros, hacen treynta y dos, este treynta y dos, se dize numero relato, y el vno de los cinco doses, se dize rayz relata deste numero treynta y dos.»

Las denominaciones de las raíces de distintos índices, que coinciden con las de las potencias de que provienen, se detallan en el cuadro siguiente:

Denominaciones de Pérez de Moya	Denominaciones Actuales
Rayz quadrada	Raíz cuadrada
Rayz cubica	Raíz cúbica
Rayz quadrada de rayz quadrada o Rayz de censo de censo	Raíz cuarta
Rayz relata	Raíz quinta
Rayz censicuba	Raíz sexta
Rayz segunda relata	Raíz séptima
Rayz quadrada de quadrada de quadrada o Rayz de censo de censo de censo	Raíz octava



1	1
2	1024
3	59049
4	1048576
5	9765625
6	60466176
7	282475249
8	1073741824
9	3486784401

Fig. 4. Potencias de exponente diez de los números dígitos.

Denominaciones de Pérez de Moya	Denominaciones Actuales
Rayz cubica de rayz cubica	Raíz novena
Rayz censirelata	Raíz décima
Rayz tercera relata	Raíz undécima

Los nombres utilizados por Pérez de Moya para describir las raíces, que están relacionados con el simbolismo algebraico de la época (Meavilla y Oller, 2014), fueron comunes en muchos impresos europeos del XVI[13]. No obstante, en la mayoría de ellos el catálogo propuesto por el canónigo jienense se limitaba a las raíces cuadradas y cúbicas[14].

4.2. Tablas de potencias de números dígitos: caracteres de exclusión

En el estudio de cada uno de los diez tipos de raíces precedentes, se presenta una tabla de las potencias de los números dígitos cuyos exponentes son, en cada caso, el índice correspondiente a la raíz que se esté considerando. Cuando existen, se añaden los caracteres de exclusión.

Por ejemplo, en el estudio de la *raíz censirelata* [= raíz décima], se ofrece la tabla siguiente (figura 4):

A esta lista, el bachiller añade (p. 384):

> «Desta tabla se manifiesta, que los números que fenescieren en 2. 3. 7. 8. seran irracionales, y los que fenescieren en 1. 4. 5. 6. 9. 0. podran ser, o no ser racionales.»

13. En la *Arithmetica integra* (1544) de Stifel y en el *General tratatto* (1556 – 1560) de Tartaglia encontramos denominaciones casi idénticas.

14. Esto sucede, por ejemplo, en las obras de Juan de Ortega (1512), Juan Andrés (1515), Joan Ventallol (1521), Petrus Apianus (1527), Oroncio Fineo (1532), Girolamo Cardano (1539), Gaspar Nicolas (1541) y Oroncio Fineo (1555).

4.3. Algoritmos para la extracción de raíces

Para la extracción de raíces, Pérez de Moya aborda en primer lugar el cálculo del número de cifras de la raíz pedida para, a continuación, proponer procedimientos para el cálculo de dichas cifras.

4.3.1. Número de cifras de la raíz

Para determinar el número de cifras de cualquier raíz, el bachiller propone las dos técnicas siguientes:

- Se ponen puntos debajo de las cifras del radicando (empezando por las unidades) de modo que entre dos puntos consecutivos quede una cifra sin puntuar (raíz cuadrada), dos cifras sin puntuar (raíz cúbica), tres cifras sin puntuar (raíz cuarta) etc. El número de puntos coincide con el número de cifras de la raíz correspondiente[15].
- Contando de derecha a izquierda y mediante barras verticales se separan las cifras del radicando en grupos de dos cifras (raíz cuadrada), tres cifras (raíz cúbica), cuatro cifras (raíz cuarta), etc. El número de grupos coincide con el número de cifras de la raíz.

El método señalado en el punto i. ya fue utilizado, entre otros, por: Luca Pacioli (1494), Juan Andrés (1515)[16], Joan Ventallol (1521), Girolamo Cardano (1539)[17], Gaspar de Texeda (1546) y Marco Aurel (1552). Por su parte, el método del punto ii. puede encontrarse en la obra de, entre otros: Nicolas Chuquet (1484), Juan de Ortega (1512), Estienne de la Roche (1521), Oroncio Fineo (1532 y 1555) y Juan de Ycíar (1549).

4.3.2. Cálculo de las cifras de la raíz

Para el cálculo de las cifras de las raíces de índices entre 2 y 11, Pérez de Moya debió estar familiarizado con los «coeficientes binomiales» que Michael Stifel estudió en su *Arithmetica integra* (1544) y Tartaglia en su *General trattato* (1556 – 1560) (figura 5).

Para las raíces cuadradas y cúbicas, el bachiller pone de manifiesto el conocimiento de dichos coeficientes:

> «La razo(n) de todo lo que en el sacar de rayz [cuadrada] se ha dicho sale d(e) la quarta proposicion del segundo de Euclides[18].» (p. 334).

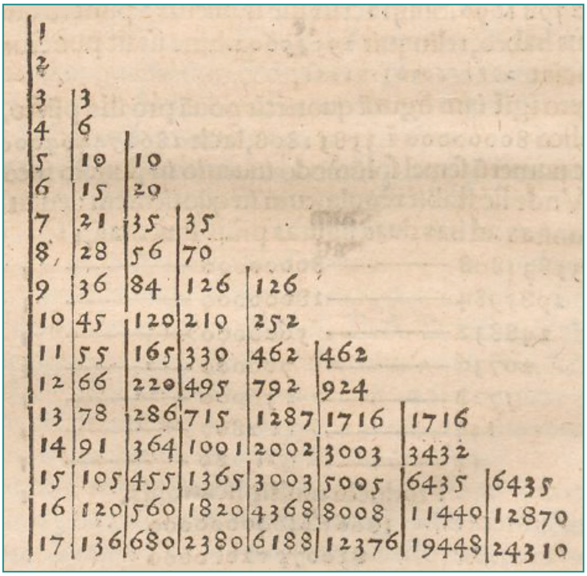
15. Este procedimiento se apoya en la expresión del radicando como suma de potencias de (raíz cuadrada), (raíz cúbica), (raíz cuarta) etc.

16. Juan Andrés también utilizó puntos entre las cifras del radicando a modo de barras verticales.

17. Cardano también utilizó puntos encima de las cifras del radicando. La misma técnica fue utilizada por Petrus Apianus (1527), Michael Stifel (1544) y Nicolás Tartaglia (1556-1560).

18. En lenguaje simbólico moderno dicha proposición equivale a la identidad:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Fig. 5. Coeficientes binomiales en la *Arithmetica integra* (1544) de Michel Stifel.

«Para ente(n)der la razon de lo que se ha hecho en el sacar de la rayz Cubica, considera q(ue) si vna linea fuere diuidida en dos qualesquiera partes, el Cubo de toda la linea sera ygual, al Cubo de la primera parte, y al triplo del quadrado de la dicha primera parte, multiplicada por la segu(n)da, y al triplo del quadrado de la segunda parte, mutiplicada por la primera, y al Cubo de la segunda.» (p.350)[19].

Los procedimientos de extracción sólo difieren de los actuales en la disposición de los cálculos (figura 6).

A lo largo del libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*, el matemático santistebeño calcula las siguientes raíces exactas[20] (ver tabla).

Además de los aspectos aritmético-algebraicos de la extracción de raíces, Pérez de Moya también considera su componente geométrica. Así, al referirse a las raíces cuadradas y cúbicas, afirma:

19. En el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure*, Tartaglia describe de forma retórica el desarrollo de distintas potencias del binomio. Así, para el exponente 7, se expresa en los siguientes términos:

> **«Se** vna quantita sara diuisa in due parti, come si voglia, il secondo relato di tutta la detta quantita sempre sara eguale a questi otto principali produtti, cioe al produtto del secondo relato della prima parte. Et al produtto del settuplo del cubo censo della detta prima parte fia la seconda parte, & al produtto del 21 uplo del relato della detta prima parte fia il censo della seconda, & al produtto del 35 uplo del cen. cen. della detta prima fia il cubo della seconda, & al produtto del 35 uplo del cen. cen. della seconda fia il cubo della prima, & al produtto del settuplo del censo cubo della detta seconda fia la prima (simplice) & finalmente al produtto del secondo relato della detta seconda parte.» (fol. 51r).

20. Hemos utilizado el simbolismo moderno para radicales, desconocido por Pérez de Moya.

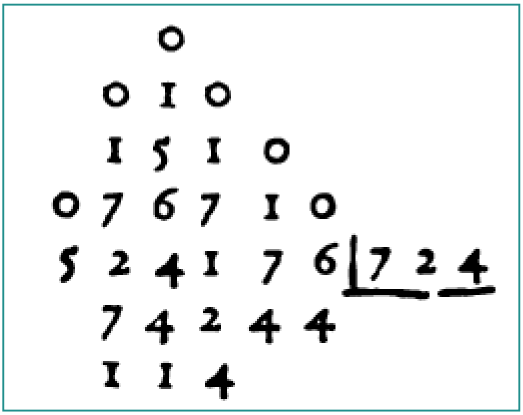


Fig. 6. Extracción de la raíz cuadrada de 524176 (p. 332).

$\sqrt{524176}$	$\sqrt{92524}$
$\sqrt[3]{15625}$	$\sqrt[3]{70444997}$
$\sqrt[3]{130323843}$	$\sqrt[3]{19683}$
$\sqrt[4]{279841}$	$\sqrt[5]{147008443}$
$\sqrt[6]{1073741824}$	$\sqrt[7]{2494357888}$
$\sqrt[8]{1099511627776}$	$\sqrt[9]{1801152661463}$
$\sqrt[10]{16679880978201}$	$\sqrt[11]{350277500542221}$

«… buscar la rayz quadrada de vn numero, no es otra cosa sino buscar vna quantidad media proporcional entre la vnidad, y el tal numero p(ro)puesto.» (p. 329).

«Nota, quando te piden que saques rayz [cuadrada] de vna qualquiera qua(n)tidad, entenderas que la tal quantidad es area de vn quadrado, y saber sacar su rayz es querer saber el lado, o principio d(e) do el tal quadrado procedio. Y si dixessen rayz Cubica, la tal quantidad entenderas ser cuerpo Cubo.» (p. 330).

Además, el bachiller determina geométricamente la raíz cuadrada y la raíz cúbica de dos números concretos [= segmentos rectilíneos].

En el primer caso, calcula la raíz cuadrada de 12 sirviéndose de un método clásico contenido en los *Elementos* de Euclides (Libro VI, prop. 9). El bachiller describe el procedimiento como sigue (p. 339):

«…queriendo sacar la rayz de doze, tomaras doze, y la vnidad, o dos, y seys, o tres, y quatro, porque qualquiera destas par de quantidades multiplicadas, hacen doze, y assi no importara mas tomar vnas q(ue) otras, y por causa de exemplificar, siruamonos de quatro y tres. Toma agora vna linea de 4 tamaños yguales, y otra de tres, assi como la linea a. b. y la c. d. entre las quales buscaras vna linea media proporcional […] y para hallar esta linea, juntaras la a.b. y c.d. a la larga, y quedara de ambas hecha la linea e.f. sobre la qual haras medio circulo, de modo que toda la e.f. quede por diametro, como paresce en la figura l.h.m. luego del punto. i. del diámetro (que es do se junto la linea a.b. con la c.d.) saca vna perpendicular hasta

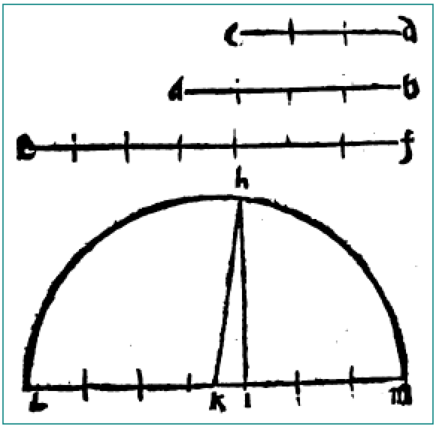


Fig. 7. Ilustración que acompaña a la extracción geométrica de $\sqrt{12}$

la circunferencia del semicirculo, como muestra la línea. h.i. y esta sera la línea proporcional, la potencia de la qual valdra doze, y por consiguiente sera la rayz del dicho doze.» (figura 7).

Pérez de Moya justifica este procedimiento con la ayuda de Euclides (corolario de la proposición 8 del libro VI y penúltima proposición del libro VI).

En cuanto a la construcción geométrica de la raíz cúbica, Moya utiliza una antigua técnica para intercalar dos medias proporcionales entre dos segmentos rectilíneos dados[21] que encontramos en la *Summa* (1494) de Luca Pacioli y en el libro segundo de la segunda parte del *General trattato di numeri, et misure* de Tartaglia. El bachiller describe la construcción pero no la demuestra[22] (p. 351):

> «Si por via de linea quisieres sacar rayz Cubica de algun numero, como si dixessen. Dame la rayz Cubica deste numero, o linea de ocho tamaños, haz della vna superficie, o figura Parallelograma, que tenga por lado vn tamaño de los ocho, que es la linea larga, como muestra a.b.c.d. con las otras lineas largas que se toquen en el angulo. b. del Parallelogramo, luego para sacar el ce(n)tro deste paralelogramo, echa vna linea del punto. b. hasta el punto. c. y otra desde el punto. a. hasta el pu(n)to. d. las quales se cortaran en el pu(n)to. g. y este sera el centro deste Parallelogramo. Luego asienta el vn pie del compas en este punto, o ce(n)tro. g. y estiende lo tanto en las lineas. a.f. y en la. d.e. que hagas dos pu(n)tos en ellas, de modo que echando vna linea del vno al otro, passe por el punto, o angulo. c. como haze la linea h.c.i. y lo que esta linea cortare de la línea. d.e. (que es lo que ay entre la. i. y la. d.) sera la rayz Cubica de la línea. b.d. que se diuidio en ocho tamaños. Y assi como la rayz Cubica de ocho, es dos, assi esta quantidad. i.d. (que dezimos ser la rayz) es dos tamaños, yguales a los ocho de la dada línea b.d. Y deste modo se sacara rayz Cubica de qualquiera numero.» Figura 8.

4.4. La aproximación de raíces

4.4.1. Aproximación de raíces cuadradas

Pérez de Moya inicia el estudio de las aproximaciones de raíces cuadradas con las palabras siguientes (p. 334):

> «Algunos, como Oroncio, quieren que sacando rayz [cuadrada] de numero sordo, que lo que sobrare se po(n)ga sobre vna raya, y la rayz que ouiere salido se doble y añada vn punto, y se ponga por denominacio(n) a lo que sobro.»

21. Siguiendo a Heath (1981), esta técnica fue utilizada por Apolonio, Herón y Filón de Bizancio.
22. En los textos de Pacioli y Tartaglia que hemos citado se ofrecen las demostraciones pertinentes.

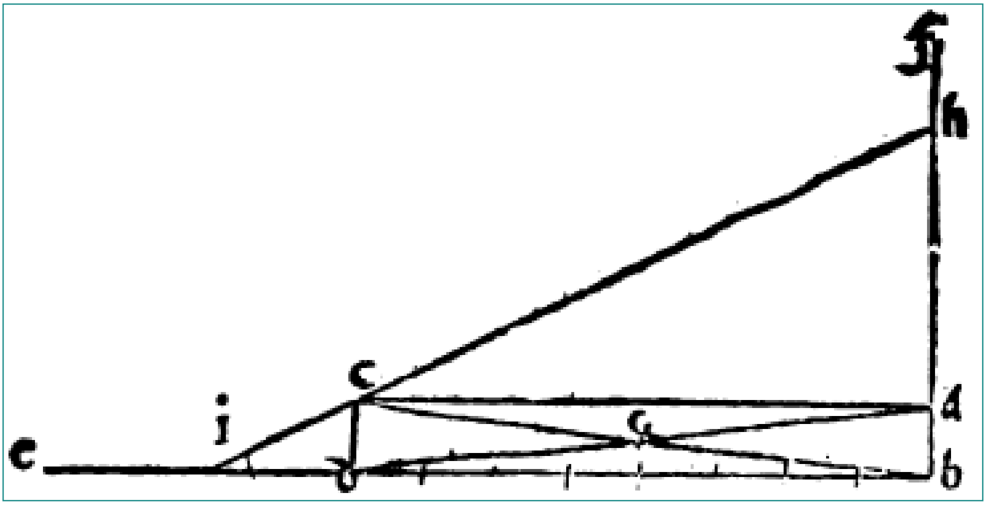


Fig. 8. Ilustración que acompaña a la extracción geométrica de $\sqrt[3]{8}$

En lenguaje simbólico moderno, la aproximación que el canónigo de la Catedral de Granada atribuye a Oroncio Fineo equivale a:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \cong a + \frac{r}{2a + 1},$$

donde a^2 es el mayor cuadrado contenido en N[23].

Consultando los ejemplos de aproximaciones de raíces cuadradas contenidos en la *Arithmetica practica*[24] de Fineo, se observa que la aproximación utilizada por Oroncio es:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \cong a + \frac{r}{2a}$$

En consecuencia, la información facilitada por el bachiller es incierta.

Pérez de Moya también se refiere al tipo de aproximación del que se sirvió Tartaglia en los siguientes términos (p. 334):

23. En el *Libro Segundo de Arithmetica* (1557, fol. 22v), Pérez de Moya enuncia dicha regla, sin referirse a Oroncio Fineo, en los siguientes términos:

> «**Qvando** hauiendo sacada la rayz de algun numero sobrare algo pondras lo que sobrare sobre vna raya, y doblaras la rayz del tal numero y añadille vno y ponerlo has debaxo por denominador.»

24. En lenguaje simbólico moderno, los ejemplos de aproximaciones ofrecidos por Oroncio Fineo (fol. 11v) son:

$$\sqrt{204315} = \sqrt{452^2 + 11} \cong 452 + \frac{11}{904}$$
$$\sqrt{291612} = \sqrt{540^2 + 12} \cong 540 + \frac{12}{1080} = 540 + \frac{1}{90}$$

«Nicolas Tartalla quiere que al duplo de la rayz [cuadrada] no se añada vno, sino que solamente se doble la rayz que ouiere venido, y se ponga debaxo de lo que sobrare por denominacion.»

Siendo cierto que Tartaglia en su *General trattato* (Libro segundo de la segunda parte, fol. 25r) hace uso de esta aproximación[25], también lo es que, en raíces cuadradas del tipo $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + 2a}$,, el matemático italiano aconseja esta otra:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + 2a} = \sqrt{a^2 + r} \cong a + \frac{r}{2a + 1}$$

A continuación, el bachiller propone otra regla de Tartaglia (*General trattato.* Libro segundo de la segunda parte, fols.25v-26r), consistente en la aplicación reiterada de aproximaciones del tipo

$$\sqrt{a^2 \pm r} \cong a \pm \frac{r}{2a},$$

y la aplica al cálculo aproximado de la raíz cuadrada de 3. En esencia, las operaciones efectuadas, expresadas en el lenguaje simbólico moderno, son:

- Primera aproximación:

$$\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 2} \cong 1 + \frac{2}{2 \times 1} = 1 + 1 = 2$$

- Segunda aproximación

$$2^2 = 3 + 1 \Rightarrow 3 = 2^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} \cong 2 - \frac{1}{2 \times 2} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

- Tercera aproximación

$$\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} = 3 + \frac{1}{16} \Rightarrow 3 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}} \cong \frac{7}{4} - \frac{1/16}{2(7/4)}$$
$$= \frac{7}{4} - \frac{1/16}{7/2} = \frac{97}{56}$$

El matemático andaluz concluye (p. 335):

«Y deste modo podras proceder aproximando tanto, que quasi no sea sensible el error, mas al justo nunca llegaras, porque por tanto se dize vn numero sordo, porque quando del se saca rayz, ni quanto, ni qual sea se oye.» (p. 335).

25. «Laqual regola e di questa sorte, che pongono quel tal auanzano sopra vna vírgola, & il doppio della prima radice (gia trouata) di sotto, et tal rotto lo accompagnano con la detta prima radice sana, & tal summa concludeno esser la radice propinqua di detta prima quantita proposta.»

Después de esto, el matemático jienense calcula el valor aproximado de la raíz cuadrada de 5 utilizando un procedimiento similar al de Nicolas Chuquet (*Triparty*, 1484)[26], consistente en acotar el valor de dicha raíz mediante intervalos abiertos encajados cuyos extremos se obtienen sucesivamente a partir de la «propiedad de los valores intermedios»:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \quad (^{27})$$

Pérez de Moya pudo conocer este método a través de Etienne de la Roche (*Larismethique nouuellement composee*, 1520)[27] o de Joan Ventallol (*Pratica mercantíuol*, 1521)[28].

Por último, el bachiller propone «otra orden de sacar rayz de numeros sordos» que admite la siguiente traducción al simbolismo moderno:

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{10^{2k} \cdot N}}{10^k}$$

Esta forma de aproximar se encuentra la «Aritmética práctica» de Oroncio (1555*,* fol. 12v) y Moya ya la utilizó en el *Libro Segundo de Arithmetica* (1557, fol. 23v). Advirtamos que la aplicación esta regla incluye el uso de fracciones decimales.

4.4.2. Aproximación de raíces cúbicas

En cuanto a la aproximación de las raíces cúbicas se refiere, el bachiller presenta las dos reglas siguientes:

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \cong a + \frac{r}{3a(a+1)+1} \quad ; \quad \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \cong a + \frac{r}{3a^2 + 3a}$$

La segunda se describe en el *General trattato* (fols. 27v-28r) de Nicolo Tartaglia del modo siguiente:

> «Per cauare adonque la propinqua radice cuba delli numeri non cubi, caua prima la radice cuba del maggior numero cubo, che sia in quel tal numero non cubo, & quel che soprarestara a tal operatione poneralo sopra vna virgola, o vuoi dir sopra di vna leneetta, & fatto questo per formar il denominator da mettere sotto di quella trippla sempre quella radice gia cauata, e quel triplato multiplicalo per la medesima radice, & a tal multiplicatione aggiongiui il detto triplato, & tal summa ponila sotto a quella lineetta per denominator, & questo tal rotto aggiongilo alla prima radice, & tal qua(n)tita cosi co(m)posta sara la radice propinqua cuba di quel proposto numero non cubo.»

26. La *Triparty* se escribió en 1484 pero su manuscrito no fue conocido hasta que Aristide Marré lo publicó en 1881. Afortunadamente, parte de la obra de Chuquet fue plagiada por Estienne de la Roche en *Larismethique nouellement composee* (1520).

27. En los folios 32r y 32v, Estienne de la Roche propone el método de aproximación de raíces de Chuquet.

28. En el folio CXXr, Ventallol resuelve dos ecuaciones de segundo grado con una incógnita utilizando el método de aproximación de Chuquet.

Refiriéndose a estas dos aproximaciones de la raíz cúbica, Simon Stevin (1585, p. 125) dice:

> «NOTA Nicolas Tartalia traictant curieusement de ceste reste, n'aiouste poinct ce dernier 1, comme nous (auec Iuan Peris de Moya) auons faict…»

4.4.3. Aproximación de raíces de índices superiores

Para las raíces de índices entre 4 y 11, Pérez de Moya se sirve de aproximaciones que admiten la siguiente generalización

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + r} \cong a + \frac{r}{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \cdots \binom{n}{n-1} a}$$

Tartaglia utiliza este tipo de aproximaciones en su *General trattato*.

4.5. Las pruebas de las raíces

En todos los casos en que se aplica (raíces de índices 2, 3, 4, 5 y 6), la prueba de la extracción de la raíz enésima de un número natural consiste en elevar a la enésima potencia la raíz hallada y añadir el resto al resultado obtenido. En el caso de la raíz censicuba [= raíz sexta], el bachiller puntualiza (p. 366):

> «La prueba destas rayces, sera conuertir la tal rayz censicuba, multiplicando seys numeros yguales, a la tal rayz, vnos por otros, y si el vltimo producto, añadiendo lo que sobrare (si sobrare algo) fuere tanto como el numero de quien se ouiere sacado la tal rayz estara buena, y si no fuere tanto, sera falsa, y sera necessario hazer la otra vez, o otras, hasta q(ue) salga deste modo.»

5. CONCLUSIONES

A la luz de lo expuesto en los parágrafos precedentes, podemos afirmar que el libro quinto (*Trata de varias rayzes de numeros*) del primer tomo del *Tratado de Mathematicas* presenta las siguientes mejoras o retrocesos en relación a las aritméticas españolas y extranjeras del siglo XVI que hemos examinado.

1) La explicación detallada de la extracción de las raíces de índices entre 2 y 11, no la hemos encontrado en las aritméticas consultadas, excepción hecha del *General trattato di numeri et misure* (1556 – 1560) de Tartaglia. En consecuencia, podemos concluir que, en cuanto al detalle y al número de casos estudiados, la exposición de Pérez de Moya es superior a la que aparece en la mayoría de los manuales del siglo XVI.
2) El bachiller sólo presenta la justificación del procedimiento utilizado para la extracción numérica de la raíz cuadrada y la raíz cúbica (cuadrado del binomio y cubo del binomio). En esto el tratamiento de Pérez de Moya es inferior al de

Tartaglia que, en forma retórica, enuncia el desarrollo de todas las potencias del binomio relacionadas con la extracción de las raíces de índices entre 2 y 11.

3) La construcción geométrica de la raíz cúbica que Pérez de Moya presenta, sin demostración alguna, no es frecuente en los manuales renacentistas y no aparece en las aritméticas españolas del XVI que hemos consultado. En el *General trattato di numeri et misure*, Tartaglia ofrece una prueba de dicha construcción.

4) El método de Chuquet para la proximación de la raíz cuadrada, que Pérez de Moya incluye en su obra, no aparece en forma explícita, salvo en la *Larismethique nouellement compose* (1520) de Estienne de la Roche y la *Pratica mercantíuol* (1521) de Joan Ventallol, en ninguna de las aritméticas españolas y extranjeras del XVI que hemos consultado.

5) Las aproximaciones de las raíces de índices entre 4 y 11, que el bachiller debió tomar prestadas de Tartaglia, no las encontramos en las aritméticas españolas del XVI que hemos estudiado.

A partir de las consideraciones anteriores establecemos las dos conclusiones siguientes:

a) El tratamiento que hace Juan Pérez de Moya de la extracción numérica de raíces es superior al que se encuentra en las aritméticas españolas del XVI, anteriores a 1573.

b) El tratamiento que hace Juan Pérez de Moya de la extracción numérica de raíces es inferior al que Tartaglia desarrolla en su *General trattato di numeri et misure*. Sin duda alguna, el bachiller se inspiró en dicha obra para escribir el libro quinto del primer tomo del *Tratado de Mathematicas*.

6. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se ha realizado dentro del proyecto “La difusión del conocimiento matemático en el nacimiento de la imprenta: descripción y análisis comparado de aritméticas del siglo XVI escritas en castellano” EDU2011-27168 financiado por en Ministerio de Economía y Competitividad de España.

REFERENCIAS

Andres, J. (1515). *Sumario breue d(e)la pratica dela Arithmetica d(e) todo el curso de larte merca(n)tiuol bien declarado: el qual se llamamaestro de cuento.* Valencia: Juan Joffre.

Apianus, P. (1527). *Eyn newe und wolgegründte underweysung aller Kauffmanss Rechnung in dreyen Büchern.* Ingolstadt.

Aurel, M. (1552). *Libro primero, de Arithmetica Algebratica.* Valencia: Ioan de Mey.

Cardano, G. (1539). *Practica Arithmetice, & Mensurandi singularis.* Mediolani: Bernardini Calusci

Chuquet, N. (1881). *Le Triparty en la Science des nombres, par maistre Nicolas Chuquet, Parisien, publié d'après le manuscrit fonds français nº1346 de la Bibliothèque Nationale* *de Paris et precédé d'une notice par M. Aristide Marré.* Rome: Imprimerie des Sciences Mathématiques et Physiques.

Euclides (1537). *Evclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum Geometricorum. Lib. XV. Cum expositione Theonis in prioris XIII a Bartholomaeo Veneto latinitate donate, Campani in omnes,& Hypsiclis Alexandrini in duos postremos.* Basilea: Iohannem Hervagivm.

Fineo, O. (1532). *Protomathesis: Opus uarium, ac scitu non minus utile quam iucundum, nunc primum in lucem foeliciter emissum.* París: (sin editor).

Fineo, O. (1555). *De Arithmetica practica, libri quatuor.* París: Michaelem Vascosanum.

Heath, T. (1981). *A history of Greek Mathematics* (Volume I). New York: Dover.

Meavilla, V. (2005). Historia de la Educación Matemática en España: el contenido algebraico de la *Arithmetica practica, y specvlatiua* de Juan Pérez de Moya (ca. 1512 – 1596). *Revista Brasileira de História da matemática.* Vol. 5, nº 9, pp. 19-35.

Meavilla, V. y Oller, A.M. (2014). El simbolismo algebraico en tres álgebras españolas del siglo XVI. *NÚMEROS*. 87, pp. 59-68.

Nicolas, G. (1541). *Tratado da pratica Darismetica*. (sin lugar): Luis Rodriguez.

Ortega, J. de (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria: fecha por…* León: en casa de Maistro Nicolau de Benedictis: por Joannnes Trinxer librero de Barcelona.

Pacioli, L. (1494). *Summa de Arithmetica,Geometria, Proportioni et Proportionalita.*Veneza: Paganini.

Pérez De Moya, J. (1557). *Libro Segundo de Arithmetica*. Salamanca: Iuan de Canoua.

Pérez De Moya, J. (1562). *Arithmetica practica, y specvlatiua*. Salamanca: Mathias Gast.

Pérez De Moya, J. (1573). *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia, y Philosophia natural. Con otras varias materias, necessarias a todas artes Liberales y Mechanicas.* Alcalá: Iuan Gracian.

Picatoste y Rodríguez, F. (1891). *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI.* Madrid: Imprenta y fundición de Manuel Tello.

Roche, E. de la (1520). *Larismethique nouellement composee*. Lyon: Constantin Fradin.

Sánchez, J. A. (1929). *Las Matemáticas en la Biblioteca del Escorial.* Madrid: Imprenta de Estanislao Maestre.

Stevin, S. (1585). *L'Arithmetique.* Leyde: Christophe Plantin.

Stifel, M. (1544). *Arithmetica integra.* Norimbergae: Iohan Petreium.

Tartaglia, N. (1556–1560). *General trattato di numeri et misure.* Vinegia: Curtio Troiano.

Texeda, G. de (1546). *Suma de Arithmetica pratica y de todas mercaderias con la horden de contadores*. Valladolid: Francisco Fernandez de Cordova.

Ventallol, J. (1521). *Pratica mercantíuol.* Lyo: Joan de la Place.

Ycíar, J. (1549). *Libro intitulado Arithmetica practica/ muy vtil y prouechoso para toda persona que quisiere exercitar se en aprender a contar.* Zaragoza: Pedro Bernuz.