Resolución de problemas de geometría con material manipulativo o soporte tecnológico

Kaouthar Boukafri y Miquel Ferrer
Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen: *La resolución de problemas permite a los estudiantes entender las matemáticas como un todo y evitar trabajarlas como bloques de contenidos curriculares separados. A su vez, pasar de hacer ejercicios mecánicos a resolver problemas puede ser confuso para algunos alumnos. En el presente artículo proponemos como complemento del enunciado verbal del problema el uso de material manipulativo o soporte tecnológico en la actividad de enseñanza. Con este fin, presentamos dos ejemplos de problemas de geometría, detallamos la fase de preparación de los problemas, su implementación en clase, y seleccionamos dos alumnos para ilustrar sus resoluciones.*
Palabras clave: *Resolución de problemas; material manipulativo; GeoGebra; actividad de enseñanza; secundaria.*

Resolution of geometry problems with manipulatives or technological support

Abstract: *Problem solving let students understand mathematics as a whole and avoid working with them as separate structures of the curricular contents. At the same time, the transition from working on mechanical tasks to solving problems can be confusing for many students. As a complement to the wording of the problem, in this article we suggest the use of manipulatives or technological support during the teaching activity. With this aim, we show two examples of geometry problems; we give explicit details on the preparation phase of these problems and their implementation in class, and select two students to exemplify their resolutions.*
Keywords: *Problem solving; manipulatives; GeoGebra; teaching activity; secondary school.*

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es un elemento relevante del currículo de matemáticas para la educación secundaria obligatoria y el bachillerato en Catalunya (Departamento de Enseñanza, 2007, 2008), ya que actúa como facilitador en el desarrollo de conocimientos y procesos matemáticos del alumnado. Por ejemplo, para bachillerato el currículo establece:

> "La resolución de problemas entendida como un estilo de enseñanza y aprendizaje que facilita la construcción de conocimiento matemático a partir de la experimentación, la búsqueda de regularidades, y la formulación de resultados conjeturales" (Departamento de Enseñanza, 2008).

En este artículo nos preguntamos cómo trabajar la resolución de problemas en el aula de secundaria para conseguir que los alumnos adquieran un aprendizaje competencial. Para ello consideramos relevante que los problemas se puedan resolver siguiendo diferentes estrategias, que relacionen conceptos matemáticos y que permitan diversos tipos de representación.

En concreto, hemos seleccionado dos problemas de geometría para ser resueltos con un material manipulativo o soporte tecnológico. Luego hemos aplicado una sistemática de tres fases centradas en la preparación de la actividad de enseñanza previa a la implementación de los problemas en clase. Finalmente, obtenemos datos de un aula de secundaria y seleccionamos dos alumnos para mostrar cómo resuelven los problemas planteados.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Muchos autores (véase, por ejemplo, Mason, Burton y Stacey, 1988; Pólya, 1981; Puig, 1996; Schoenfeld, 1985, 1992) presentan distintas consideraciones respecto del término «problema» en educación matemática y las introducen desde múltiples perspectivas. Pólya (1981) considera que "tener un problema significa buscar de manera consciente una acción apropiada para conseguir un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de manera inmediata". Interpretando esta definición se llega a la consideración de que un problema debe cumplir tres condiciones: (a) *aceptación*: la persona o grupo deben aceptar la tarea como un reto y establecer un compromiso formal para resolverla; (b) *bloqueo*: los intentos iniciales no dan buen resultado y las técnicas habituales para abordar la tarea no funcionan; y (c) *exploración*: se indaga en nuevos métodos para resolver satisfactoriamente la tarea.

Como analiza Schoenfeld (1985), diferenciar un verdadero problema matemático de un mero ejercicio es una cuestión compleja y depende en gran medida del sujeto a quien va dirigida la experiencia:

> Ser un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien es una relación entre el individuo y la tarea lo que hace de esta un problema para aquella persona. La palabra «problema» se utiliza para designar una tarea que es difícil para el individuo que está intentando resolverlo. Asimismo, esta dificultad debe representar un embrollo intelectual más allá de un mero cálculo. (Schoenfeld, 1985, p. 74)

A diferencia de lo que sucede cuando se resuelve un ejercicio, el proceso de resolución de un problema no suele producirse según unas reglas preestablecidas. El conocimiento y el comportamiento matemático de quien resuelve problemas se puede clasificar en función de: los *recursos* – conjunto de conocimientos matemáticos básicos y necesarios para que el resolutor se enfrente al problema –, las *heurísticas* – técnicas generales de resolución –, y el *control* – la forma como cada persona se enfrenta a la resolución de problemas, teniendo en cuenta los recursos y las heurísticas que conoce – (Schoenfeld, 1985). El cumplimiento, o no, de estos componentes por parte del resolutor es lo que determinará la dificultad del problema. Así, por ejemplo, un sujeto puede presentar unos recursos adecuados y un buen dominio de la heurística, pero la falta de seguridad en su sistema de creencias puede no permitir que alcance la solución del problema. Por tanto, comprender y analizar estos elementos es importante para entender cómo se enfrenta cada resolutor a un problema, pero también para ser capaz de entender las dificultades que se le presentan.

Fases en la resolución de problemas matemáticos

Pólya centró su programa en la idea de un «resolutor ideal» (Pólya, 1981), es decir, un individuo que cuando resuelve un problema avanza linealmente desde el enunciado hasta la solución. El objetivo del modelo de Pólya era conseguir que cualquier persona, con la ayuda de un tutor, aprendiera técnicas de resolución efectivas y, así, se pudiera convertir en un buen resolutor de problemas. Pólya consideraba que un alumno aprende por imitación y práctica y, por tanto, se debía combinar la orientación del profesor con el uso personal de las estrategias heurísticas. Para ello, presentó una serie de indicaciones con el fin de que el resolutor pudiera afrontar con mayor facilidad el problema y sugirió algunas estrategias que favorecían el proceso de resolución. Además planteó cuatro fases que intervenían en una buena resolución de un problema matemático:

1) *Comprensión del problema*: determinar cuál es la incógnita y cuáles son los datos y las condiciones que hay que satisfacer. Conviene plantearse si datos y condiciones son suficientes para determinar la incógnita, o bien son redundantes o contradictorios. En esta fase puede ser útil hacer un dibujo y/o simbolizar el problema de forma adecuada.
2) *Concepción de un plan*: encontrar la relación entre los datos del problema y la incógnita, y reformular el enunciado si es necesario. Considerar problemas parecidos, más simples, que el resolutor ya sabe resolver.
3) *Ejecución del plan*: comprobar que cada paso que se sigue en la resolución es correcto y, si es necesario, demostrarlo.
4) *Visión retrospectiva* o *revisión de la solución obtenida*: verificar la solución y el razonamiento utilizado. Pensar si se puede obtener el resultado de alguna manera diferente y si la misma técnica de resolución se puede aplicar en otro problema.

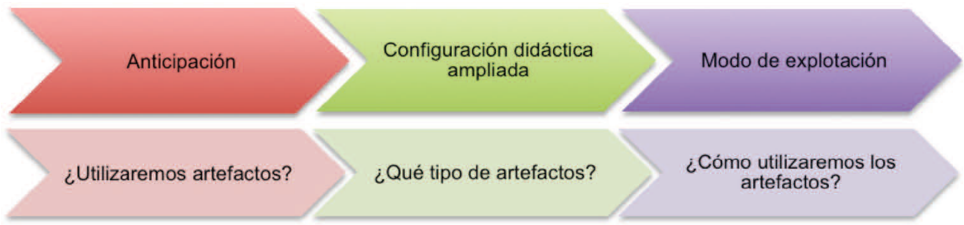


Figura 1: Papel del artefacto en las fases de la sistemática.

Preparación de una actividad matemática

Inspirándose en las discusiones productivas de Stein y Smith (2011) y considerando elementos de la orquestación instrumental de Trouche (2004) y Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer (2010), en Morera (2013) se elaboró una sistemática de seis fases para preparar y gestionar discusiones en gran grupo: *anticipación a través del árbol*, *configuración didáctica ampliada*, *modo de explotación*, *monitorización*, *selección de situaciones* y *secuenciación de la implementación didáctica*. Todas las fases permiten la gestión eficiente de una discusión en gran grupo y pueden contribuir a la creación de oportunidades de aprendizaje matemático para los estudiantes (véase, por ejemplo, Boukafri, Ferrer y Planas, 2015; Ferrer, Fortuny y Morera, 2014a; Morera, 2013), ya que se potencia la adquisición de habilidades matemáticas de alta riqueza cognitiva, procedimental y de autorregulación. A continuación detallamos las tres primeras fases de la sistemática, las cuales son propias de la preparación de la actividad de enseñanza antes de ser implementada con estudiantes.

1) *Anticipación a través del árbol*: describe la importancia de prever las posibles respuestas de los alumnos, hecho que incluye pensar cómo pueden interpretar la resolución de los problemas y tener un amplio estudio de todas las posibles formas de resolverlos. Para ello se utiliza el «árbol del problema» (Morera, Chico, Badillo y Planas, 2012), el cual se presenta como una herramienta que permite anticipar las estrategias de resolución que seguirán los alumnos en el abordaje de los problemas y sistematizar aspectos que el profesor desea tratar durante la discusión en gran grupo. Para más información sobre la elaboración del árbol del problema, consultar Ferrer, Fortuny y Morera (2014b).
2) *Configuración didáctica ampliada*: consiste en decidir con antelación qué artefactos, manipulativos y/o tecnológicos, entrarán en juego en el aula. La selección de materiales y la utilidad de estos en clase requiere de una minuciosa preparación y estudio previo.
3) *Modo de explotación*: esta fase está íntimamente ligada a la primera, en la que se ha elaborado el árbol del problema. Trata de decidir las actuaciones del profesor cuando gestiona la discusión en gran grupo para guiar a los alumnos y, así, conseguir que estos lleguen lo más lejos posible en la estructura del árbol.

Finalmente, en relación con el planteamiento de la actividad matemática y el aprendizaje competencial es importante preguntarse si, por ejemplo: ¿la actividad ayuda a relacionar conocimientos diversos dentro de la matemática o con otras materias curriculares?; o bien, ¿la actividad implica el uso de instrumentos diversos como material que se pueda manipular, herramientas de dibujo, software, calculadora, etc.? Además, en relación con la gestión de la actividad en el aula, podemos reflexionar sobre si avanza en la representación de forma que cada vez sea más precisa y se utiliza progresivamente lenguaje matemático más riguroso[1].

Los artefactos

En este artículo entendemos que un «artefacto» es toda herramienta que puede facilitar la interacción entre dos participantes de una clase y ayuda a fomentar el desarrollo de aptitudes, procedimientos y contenidos matemáticos (Ferrer, García-Honrado, Fortuny, 2015). De esta forma, los artefactos favorecen el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. En concreto, nos centramos en problemas que se pueden trabajar con artefactos tecnológicos (p.ej., software de geometría dinámica), manipulativos y otros artefactos (p.ej., lápiz y papel, y pizarra ordinaria).

Coincidimos con el documento de las "*Competencias básicas del ámbito de las matemáticas*" (Departamento de Enseñanza, 2013), en que un uso de materiales manipulativos, ya sea material diseñado específicamente u objetos cercanos, es imprescindible para introducir ideas nuevas en clase. Aprender diferentes formas de representar aumentará la flexibilidad de los estudiantes para que se planteen nuevas situaciones y potenciará la confianza de los alumnos.

> "En el camino de lo concreto a lo abstracto hay, como primer paso, la manipulación; es decir, la acción sobre los objetos, y conviene que pese a las dificultades que (…) supone para el maestro o la maestra, no se olvide este aspecto (…) ya que son las acciones las que desencadenan el pensamiento, y sobre las que se pueden construir las representaciones (…). El material que facilitamos al alumnado tiene un papel fundamental." (Biniés, 2008, p. 15).

En relación con la sistemática descrita anteriormente, podemos agrupar las fases en tres momentos (Fig. 1), que nos permiten distinguir el papel que adopta el artefacto en la aplicación de la propia sistemática:

ESTUDIO DE DOS PROBLEMAS. LA RESOLUCIÓN Y PREPARACIÓN DE UN EXPERTO

En esta sección presentamos una propuesta completa de resolución y preparación de dos problemas de geometría desde la perspectiva de un resolutor experto. Para cada problema detallamos la implementación de las fases de *anticipación*, *configuración didáctica ampliada* y *modo de explotación*. Además, hacemos especial referencia al uso de

1. Para más información consultar: <http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/suport-curricular/73-documents-de-suport-curricular/125-indicadors-competencials>

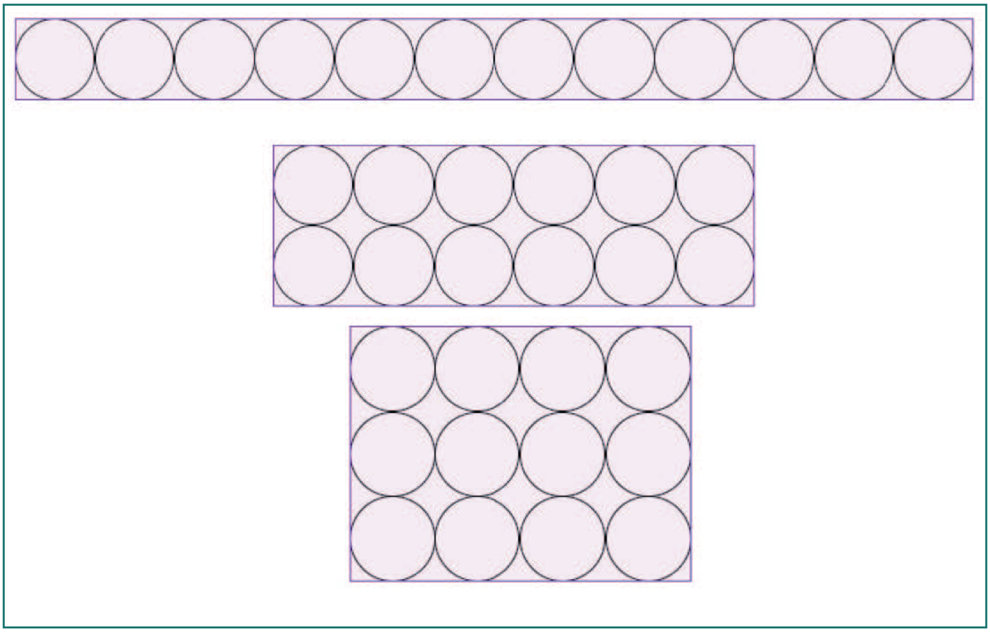


Figura 2: Distribución de los vasos formando cajas

artefactos. En concreto, en el primer problema hemos tomado como artefacto un material manipulativo y en el segundo problema el artefacto consiste en un software de geometría dinámica, el GeoGebra[2].

Problema 1: ¡Empaquetando vasos!

Disponemos de 12 vasos. Cada vaso mide 92mm de altura y 74mm de diámetro del borde por donde se bebe.
Queremos construir una caja lo más económica posible que contenga los 12 vasos.
Además queremos que:
La base de la caja sea rectangular.
Los vasos estén mirando hacia arriba en la caja.
Los vasos no estén situados uno dentro de otro.
Con las restricciones anteriores, ¿qué hace falta minimizar para construir la caja más económica posible? Razona tu respuesta.
¿Qué dimensiones tendrá la caja? Justifica tu respuesta.

Proponemos un problema de optimización de superficies. Durante la fase de *anticipación a través del árbol* discutimos los principales objetivos, que en nuestro caso son:

2. GeoGebra es un programa de geometría dinámica con código abierto y que se encuentra disponible en línea: <http://www.geogebra.org>

(i) estudiar qué elementos influyen en la minimización de la superficie y qué elementos son relevantes; (ii) identificar qué dimensiones caracterizan un ortoedro; (iii) relacionar propiedades en el plano y el espacio; (iv) evitar el cálculo excesivo y reflexionar antes; y (iv) utilizar el material manipulativo para estudiar la viabilidad de las respuestas de los alumnos y, así, poder comprobar si sus propuestas son posibles.

En el árbol del problema (véase el Anexo I), el primer paso es entender las condiciones del enunciado, es decir, ¿qué posición han de cumplir los vasos? Deben estar mirando hacia arriba, no deben estar situados uno dentro del otro y la base de la caja tiene que ser rectangular. Las opciones que resultan consisten en distribuir los vasos formando cajas de 1x12, 2x6 y 3x4 vasos (Fig. 2).

Puede darse la posibilidad de que el estudiante solo identifique una de las posibles cajas que cumplen con las hipótesis del problema. En tal caso se le pedirá una justificación de por qué considera que es la opción óptima.

Las estrategias para resolver el problema pueden ser varias, pero en el árbol consideramos las opciones de centrarse en el área de las paredes laterales (véase E2 en el Anexo I), o en el perímetro de la base (véase E3 en el Anexo I).

Llamamos *d* al diámetro del vaso y *h* a su altura. Si nos centramos en el área, tenemos que la expresión general para calcularla es la siguiente:

$$A_{total} = 2 \cdot (\text{área de la base}) + 2 \cdot (\text{área de la pared lateral}_1) + 2\ (\text{área de la pared lateral}_2)$$

Así, obtenemos que el área de cada caja en función de *d* y *h* es:

Tabla 1: Área total de la caja en función de la distribución de los vasos

Caja	Área total
1 x 12	$2 \cdot (\mathbf{12d^2} + 12dh + dh) = \mathbf{24d^2} + 26dh$
2 x 6	$2 \cdot (\mathbf{12d^2} + 6dh + 2dh) = \mathbf{24d^2} + 16dh$
3 x 4	$2 \cdot (\mathbf{12d^2} + 4dh + 3dh) = \mathbf{24d^2} + 14dh$

Dado que en todas las cajas deben caber 12 vasos, tanto la base como la tapa de todas las posibles cajas van a tener la misma superficie, podemos pues no considerar el valor del área de la base. Indistintamente, con los resultados de todas las áreas queda probado que la caja con menor área es la 3x4 (véase la Tabla 1).

Otra opción consiste en centrarse en el perímetro de la base:

Tabla 2: Perímetro de la base en función de la distribución de los vasos

Caja	Perímetro de la base
1 x 12	$2 \cdot (d + 12d) = 26d$
2 x 6	$2 \cdot (2d + 6d) = 16d$
3 x 4	$2 \cdot (3d + 4d) = 14d$

En la Tabla 2 observamos claramente que la caja con menor perímetro es la 3x4. Dado que la altura de los vasos es constante, igual para todas las cajas, podemos afirmar que la caja que necesita menos material es la 3x4.

También es importante calcular las dimensiones que determinan la caja (véase E4 en el Anexo I). Además hay que realizar la conversión de unidades correspondientes, teniendo en cuenta que los vasos miden 92mm de alto y 74mm de diámetro del borde por donde se bebe.

Así, podemos afirmar que dadas las hipótesis del enunciado la caja más económica es la 3x4 vasos, con dimensiones 222mm x 92mm x 296mm (véase E5 en el Anexo I).

Respecto a la *configuración didáctica ampliada*, en este problema consideramos el uso de artefactos manipulativos: 12 vasos de plástico, cartulina de diferentes colores, papel para que los alumnos desarrollen sus propuestas y la pizarra para que la profesora realice anotaciones para todos ellos. En el desarrollo de toda la actividad, el material manipulativo debe encontrarse al alcance tanto de la profesora como de los alumnos.

Finalmente, proponemos un *modo de explotación* en el que los alumnos trabajen en pequeños grupos o parejas, pero que anoten sus propuestas de forma individual. Repartimos el material entre los diferentes grupos y lo retiramos cuando consideramos que se convierte en un elemento de distracción. El problema está pensado para ser trabajado en una sesión de clase. La profesora dirige una discusión en gran grupo posterior al trabajo por parejas para compartir con el resto de alumnos las diferentes propuestas. También tiene en cuenta las posibles conexiones entre las propuestas usando el material manipulativo como soporte a sus intervenciones. Finalmente, se anima a los estudiantes a revisar sus propuestas, si así lo consideran, y se les da la posibilidad de modificar, corregir y añadir todo aquello que consideren oportuno.

Problema 2: ¡Puntos medios con una intrigante propiedad!

Dada una circunferencia, consideramos un punto, A, situado encima de la circunferencia y un punto B exterior a ella. ¿Qué cumplen los puntos medios de A y B cuando desplazamos A por encima de la circunferencia? Argumenta tu respuesta.

En lo relativo a la fase de *anticipación a través del árbol*, en primer lugar identificamos los objetivos matemáticos del problema y los enunciamos de la siguiente forma: (i) estudiar la homotecia como un caso particular de semejanza en un problema donde la transformación geométrica queda oculta en la solución; (ii) utilizar triángulos en posición de Tales y el teorema de Tales para argumentar la solución matemática de un problema basado en la homotecia; y (iii) darse cuenta de la importancia de utilizar GeoGebra para conjeturar la solución de un problema y poder realizar la argumentación matemática posterior.

Según el árbol del problema (véase el Anexo II), lo primero que deberían hacer los alumnos es conjeturar la solución (véase E2 en el Anexo II). Para ello, tendrían que representar la situación descrita por el enunciado (Fig. 3) y, a continuación, activar el rastro del punto medio entre A y B.

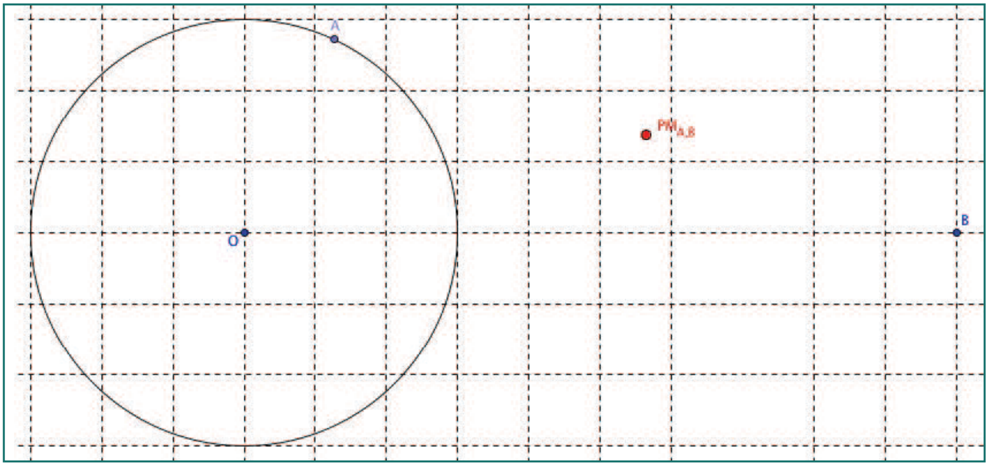


Figura 3: Representación con GeoGebra del enunciado del problema 2

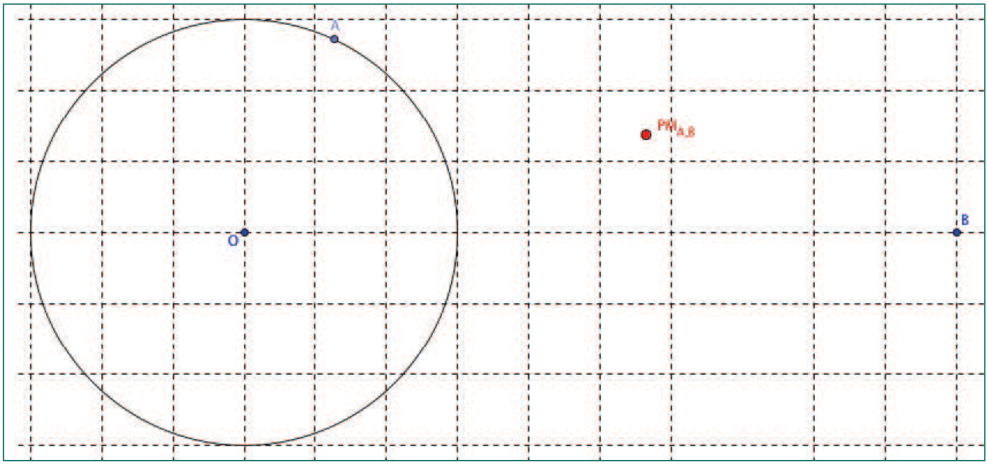


Figura 4: Conjetura de la solución con GeoGebra

De esta forma, los alumnos podrían conjeturar que la solución es una circunferencia más pequeña que la original (Fig. 4). En caso de que un estudiante no sea capaz de realizar la construcción, ya sea por un bloqueo en la comprensión del enunciado o por desconocimiento del funcionamiento del artefacto, el árbol también incluye mensajes de apoyo para ayudar al alumno a seguir con la resolución (véase E1 en el Anexo II).

A continuación, los alumnos deberían preguntarse cuestiones sobre la medida del radio de la circunferencia solución y cómo obtenerla (véase E3 en el Anexo II). En caso de que estas preguntas no se produzcan, el profesor puede formularlas y, así, ayudar a los alumnos a que sigan avanzando en la resolución del problema.

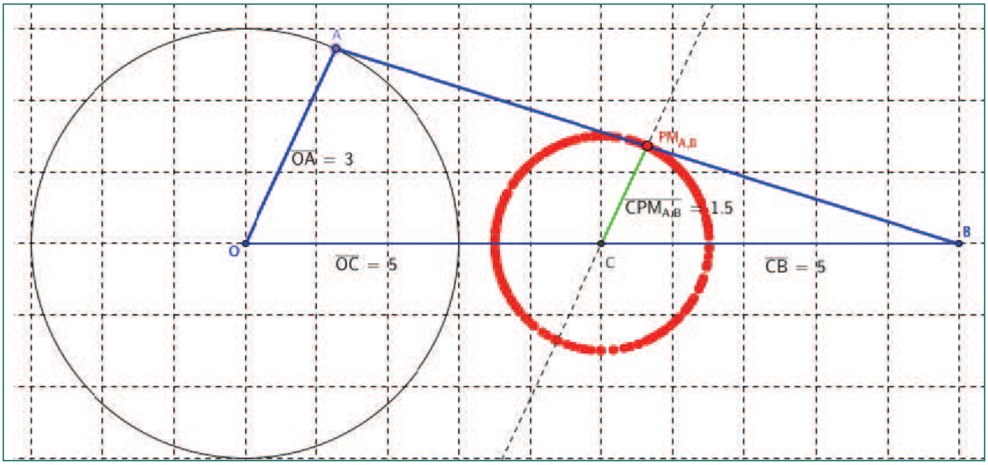


Figura 5: Aplicación con GeoGebra del teorema de Tales

Por último, los estudiantes deberían argumentar la solución conjeturada. A continuación se detalla una construcción que prueba que la solución es una circunferencia homotética a la original y con radio la mitad (véase E4 y E5 en el Anexo I).

Si construimos los triángulos *OAB* y trazamos una paralela a *OA* que pase por el punto medio de *A* y *B* (Fig. 5), observamos que, por el teorema de Tales, esta recta cortará *OB* por el punto medio, *C*. Así, los triángulos *OAB* y $CPM_{A,B}B$ se encuentran en posición de Tales y, como $PM_{A,B}$ es el punto medio de *A* y *B*, por el teorema de Tales, *C* también lo será de *OB*. Entonces, el radio de la circunferencia original, *OA*, será el doble que el de la circunferencia solución:

$$\frac{BPM_{A,B}}{PM_{A,B}C} = \frac{BA}{AO} \leftrightarrow \frac{BPM_{A,B}}{PM_{A,B}C} = \frac{2BPM_{A,B}}{OA} \leftrightarrow \frac{OA}{PM_{A,B}C} = \frac{2BPM_{A,B}}{BPM_{A,B}}(= 2) \leftrightarrow \boldsymbol{PM_{A,B}C = \frac{1}{2}OA}$$

Por tanto, queda probado que la solución de este problema es una circunferencia homotética a la original, con respecto del centro de homotecia *B*, y de radio la mitad.

Respecto a la *configuración didáctica ampliada*, consideramos el uso de dos artefactos tecnológicos: GeoGebra y proyector para visualizar las soluciones en clase. Se considera que los alumnos pueden resolver la actividad directamente en un fichero de GeoGebra y el profesor puede utilizar un proyector para mostrar diversas soluciones durante la clase.

Finalmente, sugerimos un *modo de explotación* que presenta un ciclo de trabajo colaborativo y comprende dos sesiones de clase. En la primera, los alumnos trabajan por parejas, con GeoGebra, y resuelven el problema. En la segunda sesión, el profesor dirige una discusión en gran grupo que gestiona de acuerdo a su criterio profesional. Para ello, debe tener en cuenta las soluciones de los alumnos trabajando por parejas y los elementos descritos en el árbol del problema 2. Luego se pide a los alumnos que reflexionen individualmente sobre la resolución del problema y que incluyan en su fichero de GeoGebra todos los elementos que no habían considerado en la resolución por parejas.

EXPERIMENTACIÓN EN EL AULA. LAS RESOLUCIONES DE DOS ALUMNOS

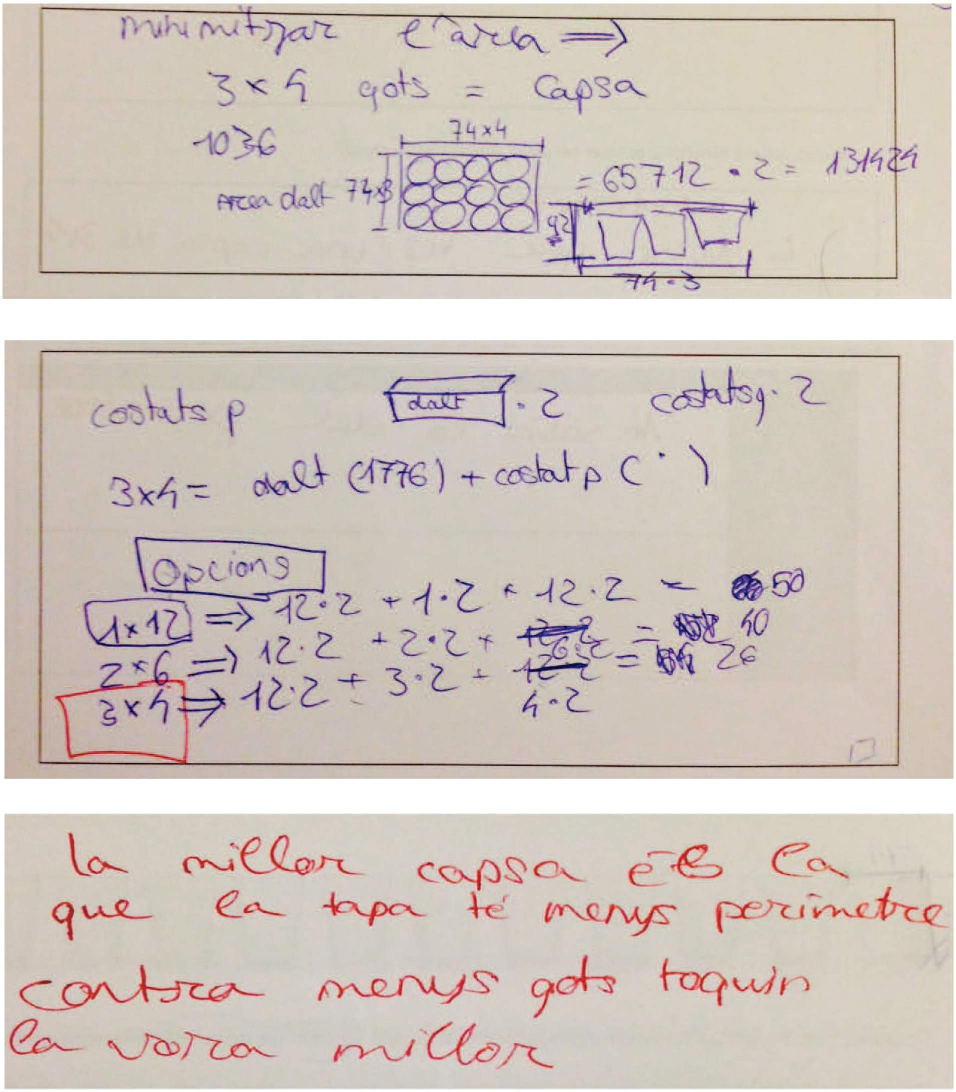
La experimentación de los dos problemas en el aula se realizó en dos clases ordinarias con alumnos de secundaria – 1º de ESO para el primer problema y 3º de ESO para el segundo problema –. El centro educativo donde se obtuvieron los datos pertenece a un ámbito sociocultural medio-alto y cumple con el desarrollo curricular normativo del Departamento de Enseñanza de la Generalitat de Catalunya. La profesora que gestionó las sesiones de clase era la docente habitual de matemáticas de los alumnos. En el momento de la experimentación, la profesora presentaba ocho años de experiencia docente en el mismo centro de educación secundaria. Para gestionar las clases tuvo a su alcance los árboles de los dos problemas y los comentarios relativos a las fases de *configuración didáctica ampliada* y *modo de explotación*.

En los dos problemas se siguió un ciclo de trabajo que combinaba la resolución por parejas, la discusión en gran grupo y la posterior reflexión escrita e individual de los alumnos. A continuación detallamos las resoluciones finales de Jorge para el primer problema y de Andrea para el segundo problema. Ambas respuestas estaban en el mismo documento o fichero de GeoGebra, y se pidió a los alumnos que escribiesen en dos colores distintos: azul para el trabajo en pareja, y negro o rojo para la reflexión individual.

Jorge y su compañero de trabajo consideraron que la caja más económica, es decir, la que requería menos material, era aquella que presentaba menos área (véase la primera imagen de la Fig. 6). Para justificar su respuesta, estos alumnos realizaron los cálculos detallados en la Tabla 1, tomado d = h = 1 (véase E2 en el Anexo I), y obtuvieron que la caja que tenía menor área era la caja 3 x 4 (véase la segunda imagen de la Fig. 6). Después de la discusión en gran grupo, Jorge recogió en su dossier las propuestas de sus compañeros (véase la tercera imagen de la Fig. 6). La primera propuesta que detalló Jorge se correspondía con la estrategia E3 del árbol del primer problema (véase el Anexo I), la cual consideraba que la mejor caja era aquella que presentaba menor perímetro. En la segunda propuesta, Jorge consideró que cuantos menos vasos estuviesen en contacto con el borde de la caja, menos material sería necesario[3] (figura 6).

En la resolución individual posterior a la discusión en gran grupo del segundo problema, Andrea creó varios puntos encima de la circunferencia original (véase circunferencia de centro *A* en la Fig. 7) y, para cada punto, construyó el correspondiente punto medio respecto de *C*. Así observó que se creaba la silueta de una circunferencia más pequeña (véase E3 en el Anexo II). Luego, con el GeoGebra activó el rastró de los puntos medios e identificó que la transformación aplicada era una homotecia que tenía como centro el punto *C*. Para calcular la razón de semejanza y justificar la elección del centro empleó el teorema de Tales (véase E5 en el Anexo II). Por este motivo, dividió la longitud del segmento *PC* entre la longitud del segmento *FC*, obteniendo que la razón era igual a ½ y el centro de la homotecia se correspondía con el punto *V*.

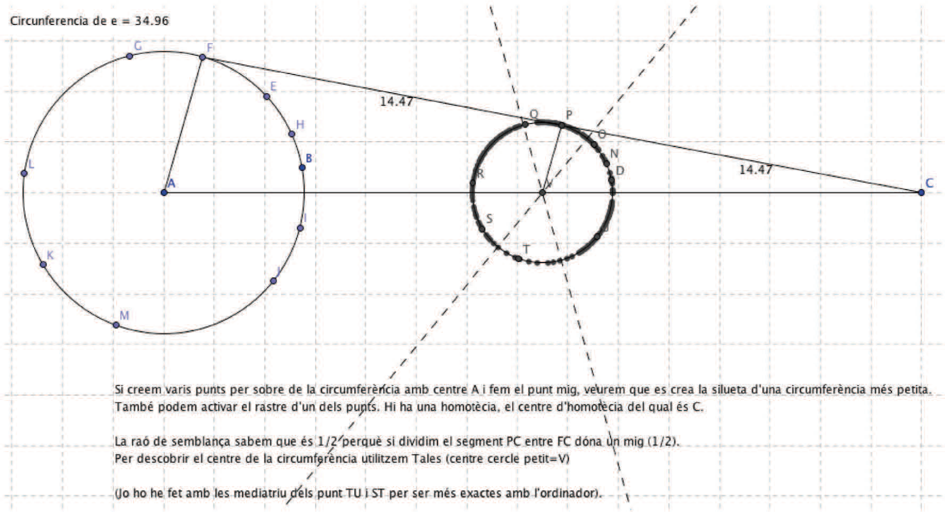
3. Durante una entrevista realizada a Jorge, posterior a la resolución del problema, el alumno nos indicó que no había considerado la opción de minimizar el perímetro.



Notas:

1. Minimizar el área.
2. La caja solución es la caja 3 x 4 vasos.
3. La mejor caja es la que la tapa tiene menos perímetro. Cuantos menos vasos estén en contacto con el borde mejor.

Figura 6: Fragmento de la resolución de Jorge para el primer problema



Notas:

1. Si creamos varios puntos por encima de la circunferencia con centro A [izquierda] y hacemos el punto medio, vemos que se crea la silueta de una circunferencia más pequeña. También podemos activar el rastro de uno de los puntos. Hay una homotecia, el centro de homotecia del cual es el punto C.
2. La razón de semejanza sabemos que es ½, porque si dividimos el segmento PC entre FC obtenemos ½. Para descubrir el centro de la circunferencia utilizamos Tales (centro del círculo más pequeño = V).

Figura 7: Resolución final de Andrea para el segundo problema.

CONSIDERACIONES FINALES

El objetivo principal de este artículo era estudiar cómo la resolución de problemas en el aula de secundaria favorecía que los alumnos adquiriesen un aprendizaje competencial. Para ello, hemos mostrado que una buena selección de problemas competenciales permite que emerjan diferentes estrategias de resolución, procesos y conceptos matemáticos en el aula. Además, anticipar la actividad matemática en clase favorece que el profesor pueda aproximarse a los procesos de resolución de los estudiantes y realizar conexiones entre ellos.

En relación con las cuatro fases propuestas por Pólya, el profesor puede ofrecer ayudas en función del estadio en el que se encuentra la resolución del alumno, evitando así explicar directamente la solución del problema. Por ejemplo, es diferente el tipo de ayuda que el profesor puede ofrecer a un alumno que no entiende las condiciones del enunciado del problema, o bien la ayuda que debe proporcionar a un estudiante que no recuerda la fórmula del perímetro de un círculo. En este punto el artefacto facilita que el profesor identifique la interpretación del enunciado del problema que realiza cada alumno y los procesos que siguen en su resolución.

La preparación de los problemas que se realizó antes de la implementación en el aula tuvo repercusión en las resoluciones finales de los alumnos. Tanto Jorge como Andrea fueron capaces de resolver satisfactoriamente los problemas. Los alumnos iniciaron la resolución manipulando el artefacto, hecho que les condujo a abordar el problema centrándose en una estrategia concreta. No obstante, en la discusión en gran grupo se favoreció que los alumnos compartiesen diferentes estrategias, las cuales dependían de múltiples factores. Algunos ejemplos son el tipo de manipulación del artefacto, la gestión de la clase que realizó la profesora o los conocimientos previos de los alumnos. Por tanto, la discusión en grupo se postuló como un elemento clave para favorecer el aprendizaje competencial, ya que los alumnos se centraron habitualmente en la ejemplificación de cálculos aritméticos y omitieron, en sus protocolos escritos, la redacción argumentada del proceso de resolución que habían seguido. Aún así, la reflexión individual posterior a la discusión en gran grupo resultó importante para que Jorge y Andrea incorporasen en sus protocolos escritos nuevas estrategias que no habían considerado trabajando por parejas.

Finalmente, en futuros trabajos será interesante continuar estudiando este tema para determinar hasta qué punto la manipulación es capaz de fomentar las habilidades matemáticas de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está financiado por los Proyectos EDU2011-23240 (Miquel Ferrer) y EDU2012-31464 (Kaouthar Boukafri), por las becas FPI BES-2012-053575 (Miquel Ferrer) y BES-2013-063859 (Kaouthar Boukafri), del Ministerio de Economía y Competitividad. Ambos autores son miembros del equipo GIPEAM – Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática, con referencia SGR2014-972 de la Generalitat de Catalunya.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Biniés, P. (2008). *Converses matemàtiques amb Maria Antònia Canals: O com fer de les matemàtiques un aprenentatge apassionat.* Barcelona, España: Graó.

Boukafri, K., Ferrer, M., y Planas, N. (2015). Whole class discussion in the context of mathematics problem solving with manipulatives. *Proceedings of the IX Congress of the European Society for Research of Mathematics Education* (en prensa). Praga, República Checa: ERME.

Departamento de Enseñanza (2007). *Decret 143/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria*. Barcelona, España: Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya.

Departamento de Enseñanza (2008). *Decret 142/2008 de 15 de juliol, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyament del batxillerat*. Barcelona, España: Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya.

Departamento de Enseñanza (2013). *Competències bàsiques en l'àmbit de matemàtiques*. Barcelona, España: Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. Consultar en línea:
<http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/col_leccions/competencies_basiques/competencies_mates_primaria.pdf>

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*, 213-234.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2014a). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 385-405.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2014b). Sobre las discusiones en gran grupo: ejemplificación en un problema de semejanza. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *67*, 57-66.

Ferrer, M., García-Honrado, I., y Fortuny, J. M. (2015). Estudio de la calidad de la enseñanza comparando discusiones en gran grupo de tareas de semejanza. *Actas del Cuarto Simposio Internacional ETM Espacio de Trabajo Matemático* (en prensa). El Escorial, España: ETM.

Mason, J., Burton, K., y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Tesis doctoral no publicada. Barcelona, España: UAB.

Morera, L., Chico, J., Badillo, E., y Planas, N. (2012). Problemas ricos en argumentación para secundaria: reflexiones sobre el pensamiento del alumnado y la gestión del profesor. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 70*, 9-20.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving*. Nueva York, EEUU: John Wiley and Sons.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Comares.

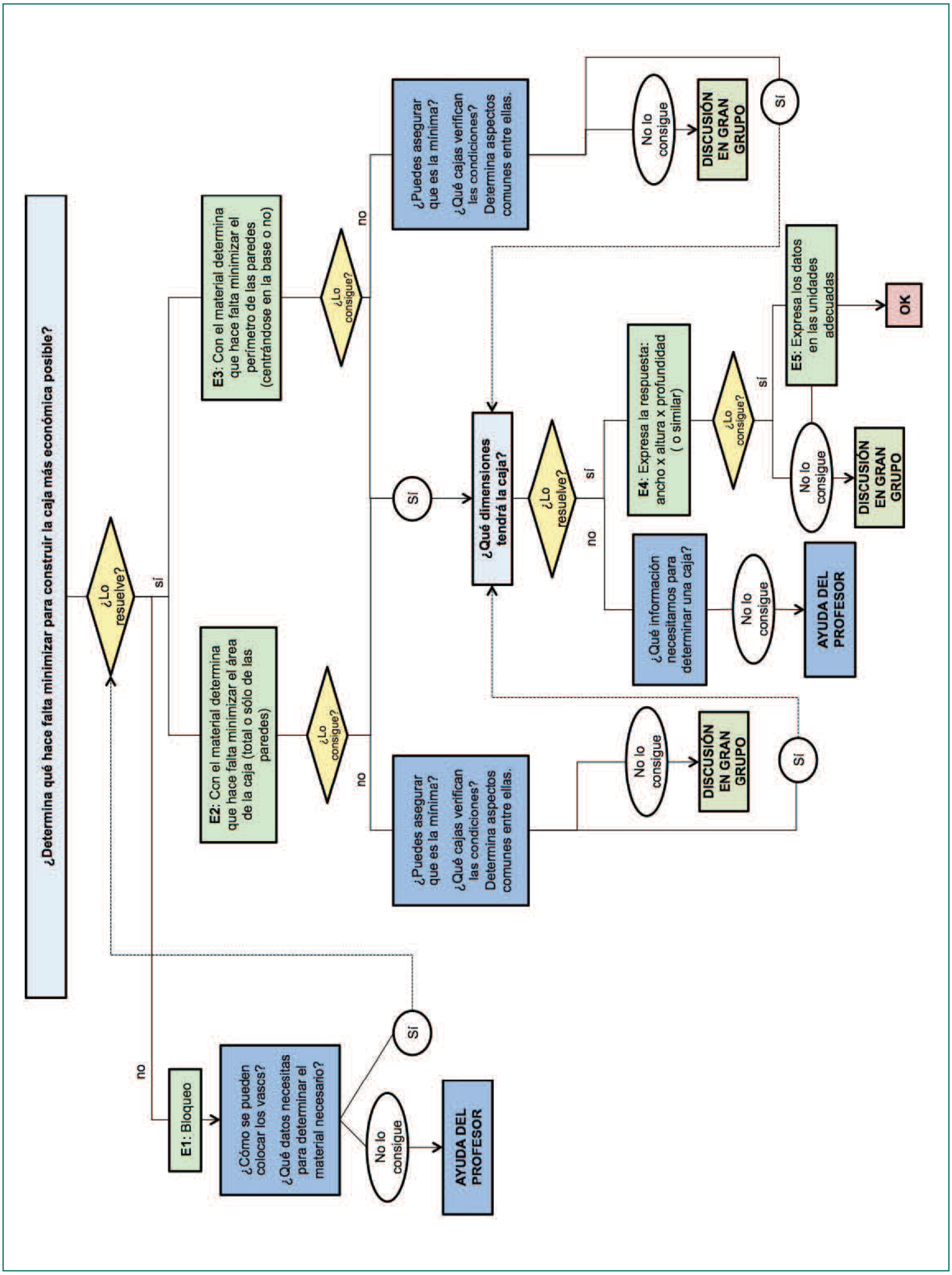
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, EEUU: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En A. D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). Nueva York, EEUU: Macmillan.

Stein, M. K., y Smith, M. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, Virginia, EEUU: NCTM.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3), 281-307.

Anexo I: Árbol del problema 1.



Anexo II: Árbol del problema 2.